PROBABILISTYCZNE METODY PODZIAŁU ZBIORU DÓBR NIEPODZIELNYCH

Marek Bożykowski[1]
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: *Podział zbioru dóbr niepodzielnych w sytuacji, gdy rozdzielane dobra różnią się wartością, stwarza wyzwanie zapewnienia równości pomiędzy uczestnikami podziału. Jednym z najpopularniejszych sposobów na rozwiązanie tego problemu jest użycie loterii. W niniejszym artykule zaprezentowanych jest siedem wybranych procedur probabilistycznych: losowanie z rozkładu równomiernego, leksykograficzna procedura równych szans satysfakcji, procedura równych szans wyboru,* core from random endowments, probabilistic serial, top trading cycles from equal division *oraz procedura równych szans wyboru z nieskończenie dużym czynnikiem* k. *Niektóre z tych procedur zawsze prowadzą do tych samych rezultatów, co pewna inna procedura, są zatem wzajemnie równoważne. Ponadto artykuł przedstawia własności formalne tych procedur: porządkową optymalność, optymalność* ex post *oraz mocne i słabe wersje wolności od zazdrości, proporcjonalności, słuszności i odporności na indywidualne zachowania strategiczne.*

Słowa kluczowe: *sprawiedliwy podział, dobra niepodzielne, procedury probabilistyczne, procedura równych szans wyboru, probabilistic serial.*

PROCEDURES FOR RANDOM DIVISION OF A SET OF INDIVISIBLE GOODS

Abstract: *In fair distribution of a set of indivisible goods it is problematic to provide basic equality if the goods differ in value. One of the most popular solutions to the problems are lotteries. The paper presents seven selected probabilistic procedures: random distribution, lexicographic procedure of equal chances of satisfaction, random serial dictatorship, core from random endowments, probabilistic serial, top trading cycles from equal division and random priority with infinite k factor. Some of these procedures always lead to the same result as some other procedure, therefore these procedures are equivalent.*

[1] Marek Bożykowski, Zakład Statystyki, Demografi i Socjologii Matematycznej w Instytucie Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Karowa 18, 00-324 Warszawa; e-mail: m.bozykowski@is.uw.edu.pl

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

The formal features of the procedures are also analysed in the paper: ordinal efficiency, ex post efficiency, and both strong and week version of: envy-freeness, proportionality, equitability, and individual strategy-proofness.

Key words: *fair distribution, indivisible goods, probabilistic procedures, random priority, probabilistic serial.*

1. Wstęp teoretyczny

W świecie społecznym problem sprawiedliwego podziału ograniczonych zasobów jest spotykany niemal na każdym kroku: podział ziemi, rozdzielanie spadku między spadkobierców, przydzielanie miejsc na uczelniach, podział łupów, przyporządkowanie miejsc do spania na wspólnym wyjeździe, ustalanie kolejności zwalniania ze służby wojskowej, przydzielanie organów do przeszczepów. Społeczeństwa opracowywały i modyfikowały mniej lub bardziej udane sposoby rozwiązywania tego problemu w poszczególnych kontekstach, niekiedy odwołując się do losowania. Choć problem sprawiedliwego podziału ma doniosłe znaczenie praktyczne, jest przedmiotem formalnej analizy zaledwie od kilkudziesięciu lat (zob. Kuhn, 1967).

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie wybranych probabilistycznych procedur sprawiedliwego podziału i zestawienie własności generowanych przez nie rozwiązań. Pozwoli to nie tylko na porównanie przedstawionych procedur i ich lepsze zrozumienie. Zaprezentowane zestawienie może służyć praktycznym celom, pomagając przy udoskonalaniu rozwiązań stosowanych w praktyce do problemu podziału. Nie wymaga to koniecznie wprowadzania prezentowanych metod jako gotowych rozwiązań – mogą one służyć jako punkty odniesienia w ewaluacji istniejących i projektowanych algorytmów podziału.

Problem podziału może dotyczyć zarówno dóbr podzielnych (np. pieniądze, ciasto), jak i niepodzielnych, tj. takich, których nie da się podzielić na mniejsze części (np. mandat poselski, miejsce na uczelni) lub których podzielenie znacznie obniżyłoby wartość tych dóbr lub uczyniłoby je bezużytecznymi (np. obraz, samochód, organy do transplantacji).

Niniejszy artykuł będzie poświęcony wyłącznie problemowi alokacji zbioru dóbr niepodzielnych. Ponadto przyjęte zostaną dodatkowe ograniczenia, często spotykane w literaturze – liczba przydzielanych dóbr jest równa liczbie uczestników podziału, a każdy z nich ma otrzymać dokładnie jedno dobro. Ponadto żaden z uczestników podziału nie jest obojętny między żadnymi spośród dzielonych dóbr. Poza tym przyjęte zostanie założenie, że wszyscy uczestnicy podziału mają równe uprawnienia do dzielonego zbioru dóbr, a ocena podziału jest dokonywana przez uczestników wyłącznie na podstawie tego, co sami otrzymają. Nawet przy takich uproszczeniach problem nie jest trywialny. Założenia wraz z ich konsekwencjami zostaną omówione szerzej w sekcji 2.

Alokacja (inaczej podział deterministyczny) zbioru dóbr niepodzielnych polega na przypisaniu dóbr z tego zbioru do konkretnych uczestników podziału. W jej wyniku dobra, które były w tym czy innym sensie własnością wspólną, stają się własnością prywatną, np. jak w przypadku podziału majątku przy rozwodzie, rozdzielaniu spadku między spadkobierców czy podziale nagród rzeczowych wygranych drużynowo.

Ujmując rzecz bardziej formalnie, mamy zbiór uczestników podziału G i zbiór dóbr D. Oznaczmy liczbę uczestników przez n, zaś liczbę dóbr przez a. Alokacja jest to funkcja, która każdemu z dóbr należących do zbioru D przypisuje uczestnika podziału (element zbioru G), do którego to dobro trafia. Dla danych zbiorów uczestników i dóbr da się wyznaczyć n^a różnych alokacji. Zbiór wszystkich możliwych alokacji będziemy oznaczać jako X. Alokację da się przedstawić jako macierz o rozmiarach $n \times a$. W sytuacji, gdy liczba dóbr jest równa liczbie uczestników podziału, macierz ta będzie macierzą kwadratową o rozmiarach $n \times n$. Element w i-tym wierszu j-tej kolumny tej macierzy przyjmuje wartość 1 w przypadku, gdy w tym podziale i-ty uczestnik otrzymuje j-te dobro, oraz wartość 0, jeśli go nie otrzymuje.

Uczestnicy podziału mogą różnić się ocenami atrakcyjności poszczególnych dóbr. Uwzględnianie tych ocen przy wyznaczaniu alokacji jest wysoce wskazane. Oczywiście wybór alokacji powinien być w miarę możliwości zgodny z tymi ocenami – raczej życzliwy niż złośliwy. Przykładowo, jeśli mamy do podziału między dwie osoby bilet do teatru i zegarek, przy czym pierwsza osoba woli bilet, a druga zegarek, to zapewne za właściwą alokację uznalibyśmy taką, która daje uczestnikom podziału bardziej lubiane przez nich dobro, zaś próba przydzielenia im dóbr mniej przez nich lubianych wzbudziłaby uzasadniony sprzeciw.

Oceny atrakcyjności dóbr dokonywanych przez poszczególnych uczestników podziału są ujęte w profilu preferencji (użyteczności porządkowych). W profilu tym znajdują się dokonane przez poszczególnych uczestników uporządkowania dóbr – od tego, które najbardziej chcieliby otrzymać, do tego, które w najmniejszym stopniu chcieliby otrzymać. Profil taki będzie podstawą do oceny poszczególnych alokacji. Funkcję, która każdemu profilowi preferencji przypisuje alokację, nazwiemy procedurą deterministyczną.

Warto podkreślić, że profil preferencji (użyteczności porządkowych) zawiera jedynie informację o tym, które dobro jest lepsze od którego według poszczególnych uczestników, ale nie o tym, jak bardzo dane dobro jest według nich lepsze lub gorsze od drugiego.

W niniejszym artykule ograniczymy się do sytuacji, w których uczestnicy podziału nigdy nie są indyferentni między dobrami, tzn. żaden uczestnik porównując parę dóbr, nie dochodzi do wniosku, że jest mu obojętne, które z nich otrzyma. W szczególności oznacza to, że w zbiorze nie ma dwóch identycznych dóbr. Preferencje niezawierające indyferencji nazywamy *mocnymi*. Omawiane w tym artykule procedury zostały zaprojektowane do tego typu sytuacji, choć przynajmniej dla niektórych z nich istnieją ich rozszerzenia na sytuacje, w których dopuszcza się indyferencje (zob. np. Katta i Sethurman, 2006).

Zbiór możliwych profili preferencji uczestników ze zbioru G na dobrach ze zbioru D oznaczać będziemy przez P_{GD}. Pojedynczy profil preferencji ma postać macierzy rozmiarów $n \times a$ (w przypadku równej liczby dóbr i uczestników podziału – rozmiarów $n \times n$), w której element w i-tym wierszu j-tej kolumny przyjmuje wartość równą pozycji, którą j-te dobro zajmuje w hierarchii preferencji i-tego uczestnika podziału, a więc 1 – gdy jest to jego ulubione dobro, 2 – gdy jest to jego drugie ulubione dobro, … i wartość a – gdy jest to najniżej cenione przez niego dobro.

Głównym problemem w przypadku sprawiedliwego podziału zbioru dóbr niepodzielnych jest to, że muszą one w całości trafić do pojedynczych uczestników podziału. Przy zróżnicowanej wartości tych dóbr może prowadzić to do rażącej nierówności podziału. Istnieją dwa podstawowe sposoby radzenia sobie z tym problemem: system rekompensat pieniężnych i loterie.

Procedurom podziału z systemem rekompensat pieniężnych poświęciłem dwa artykuły (Bożykowski, 2011, 2012). Procedury te, mimo licznych zalet, nie zawsze dają się zastosować w praktyce. Przede wszystkim może okazać się, że niektórzy uczestnicy podziału nie dysponują środkami wystarczającymi do wypłaty rekompensat pieniężnych. Uczestnicy podziału mogą mieć także problemy z wyrażeniem swojej wyceny wartości niektórych dóbr w jednostkach pieniężnych. Niekiedy też na przeszkodzie stoją względy etyczne – przy rozdzielaniu niektórych dóbr osąd moralny zabrania przydzielania ich według tego, ile kto jest gotów za nie zapłacić, np. mandaty poselskie, miejsca na uczelni, organy na przeszczepy. Wraz z wprowadzeniem transakcji finansowych do pewnych instytucji, może nastąpić zepsucie wypracowanych w nich pożądanych norm. W niektórych sytuacjach może to zniszczyć pierwotny cel istnienia takiej instytucji (zob. m.in. Sandel, 2013).

Alternatywnym rozwiązaniem jest rozdzielanie zbioru dóbr przy użyciu loterii. Łatwo jednak zauważyć, że w niektórych sytuacjach podziału moralny sprzeciw budzi zarówno stosowanie rekompensat pieniężnych, jak i loterie (np. rozdzielanie mandatów poselskich między partie, rekrutacja na uczelnie).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Podobnie jak system rekompensat pieniężnych, losowanie ma za zadanie zapobieganie nierównościom podziału. Następuje to poprzez zastąpienie każdego dobra niepodzielnego dobrem podzielnym – prawdopodobieństwem otrzymania określonego dobra niepodzielnego. Zamiast wybierać pojedynczą alokację, można podjąć decyzję losowo. Nie trzeba jednak koniecznie nadawać wszystkim alokacjom równych prawdopodobieństw bycia wybraną. W szczególności dla niektórych alokacji prawdopodobieństwo to może być równe 0.

Loteria na podziałach deterministycznych jest wektorem o liczbie elementów równej liczbie możliwych podziałów deterministycznych. Elementy tego wektora są nieujemne i sumują się do 1. Wektor ten określa, z jakim prawdopodobieństwem zostanie przeprowadzony dany podział deterministyczny.

Na podstawie loterii na alokacjach można wyznaczyć macierz prawdopodobieństw. Jest to macierz rozmiaru $n \times a$ (w przypadku równej liczby dóbr i uczestników podziału – rozmiaru $n \times n$). Element w i-tym wierszu j-tej kolumny tej macierzy jest równy sumie prawdopodobieństw wylosowania takich alokacji deterministycznych, w których i-ty uczestnik podziału otrzymuje j-te dobro, a zatem jest równy prawdopodobieństwu tego, że i-ty uczestnik otrzyma j-te dobro. Suma elementów w każdej kolumnie tej macierzy wynosi 1. W konsekwencji przyjętego założenia, że każdy uczestnik ma otrzymać dokładnie jedno dobro, również suma elementów w każdym wierszu tej macierzy wynosi 1.

Różne loterie na alokacjach mogą prowadzić do identycznych macierzy prawdopodobieństw. Odwracając perspektywę, macierz prawdopodobieństw może być realizowalna przez wiele różnych loterii na alokacjach.

Procedurą probabilistyczną będziemy nazywać funkcję, która każdemu profilowi preferencji przypisuje macierz prawdopodobieństw.

Poniżej znajduje się zestawienie wprowadzonych do tej pory oznaczeń. Będą się one wielokrotnie pojawiać w dalszej części tekstu:

G – zbiór uczestników podziału,

D – zbiór dóbr,

n – liczba uczestników podziału, $n=\#G$,

a – liczba dóbr, $a=\#D$; ze względu na przyjęte ograniczenia $a=n$,

P_{GD} – zbiór możliwych profili preferencji uczestników ze zbioru G na dobrach ze zbioru D.

Opis niektórych procedur probabilistycznych wskazuje nie tyle na sposób wyznaczania macierzy prawdopodobieństw, co na metodę wyboru loterii na alokacjach. Aby móc porównywać procedury różniące się pod tym względem, konieczne jest spro-

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

wadzenie ich wyników do wspólnej formy. Z twierdzenia Birkhoffa-von Neumanna wynika, że każdą macierz prawdopodobieństw da się uzyskać w wyniku jakiejś loterii na alokacjach deterministycznych, jednak dla niektórych macierzy istnieje więcej niż jedna taka loteria (zob. np. Lissowski 2008: 213–214, 2013: 206). W tej sytuacji naturalnym wyborem było sprowadzanie wyników do postaci macierzy prawdopodobieństw. Tym właśnie podyktowane jest przyjęcie w niniejszym artykule takiej a nie innej definicji procedury probabilistycznej, spotykanej w literaturze przedmiotu (np. Kesten, 2006: 2; definicja ta jest *implicite* używana m.in. w Bogomolnaia i Moulin, 2001), choć spotyka się również definicje, w której przeciwdziedziną procedury probabilistycznej jest loteria na alokacjach (np. Kuc, 2000: 171, Lissowski, 2006: 188).

Warto podkreślić, że rozwiązania losowe mogą zagwarantować wszystkim uczestnikom podziału równie korzystną sytuację startową (równość *ex ante*) poprzez odpowiednie przypisanie uczestnikom prawdopodobieństw otrzymania poszczególnych dóbr, jednak nie mogą zapobiec nierównościom w alokacji dóbr, powstałej w wyniku przeprowadzonego losowania (nierówność *ex post*). Przykładowo w sytuacji, w której mamy dwóch uczestników podziału i jedno dobro, np. samochód, to możemy obu uczestnikom dać równą szansę otrzymania dobra (½), jednak dobro to trafi w końcu do jednego z nich, tworząc nierówną alokację – jeden z uczestników podziału otrzyma samochód, drugi odejdzie z pustymi rękami.

Procedury probabilistyczne, podobnie jak metody podziału z użyciem rekompensat pieniężnych, mogą wzbudzać opór w przypadku podziału niektórych dóbr. Alokacja pewnych dóbr w powszechnym odczuciu nie powinna odbywać się w sposób losowy. Przykładem może być prawo do opieki nad dzieckiem w przypadku sprawy rozwodowej. Podjęcie podobnej decyzji przy użyciu rzutu monetą spotkałoby się z powszechnym oburzeniem.

W kolejnym rozdziale niniejszego artykułu przedstawię założenia rozważanego modelu, zaś w następnym – opis siedmiu wybranych procedur probabilistycznych wraz z obliczeniami na heurystycznych przykładach, przytoczę także dowody na to, że niektóre procedury prowadzą zawsze do identycznych wyników co pewna inna procedura. W czwartym rozdziale zaprezentuję definicje wybranych pożądanych cech podziału dóbr oraz wskażę, które z procedur omawianych w rozdziale trzecim spełniają poszczególne postulaty. Spełnianie (bądź niespełnianie) tych warunków przez omawiane procedury przedstawię w formie zbiorczej tabeli w podsumowaniu rozdziału czwartego. W zakończeniu omówię możliwości dalszego rozwoju analiz w omawianej problematyce.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

2. Założenia modelu

Zakres rozważań w dalszej części artykułu zostanie ograniczony do sytuacji spełniających określone warunki wymienione poniżej:

1. Uczestnicy mają mocne porządkowe preferencje na rozdzielanych dobrach.
2. Uczestnicy są zainteresowani jedynie tym, z jakim prawdopodobieństwem otrzymają jakie dobro oraz jakie dobro do nich ostatecznie trafi w wyniku losowania. Nie ma dla nich znaczenia, jak zostaną rozdzielone pozostałe dobra.
3. Liczba dóbr jest równa liczbie uczestników podziału. Każdy uczestnik podziału ma otrzymać dokładnie jedno dobro.
4. Uczestnicy mają równe uprawnienia do dzielonego zbioru dóbr.

Ad 1.

Założenie o tym, że uczestnicy mają mocne preferencje, oznacza, że żaden z nich nie uznaje żadnych dwóch dóbr za jednakowo atrakcyjne, tj. nie jest mu obojętne, które z nich otrzyma.

Ponadto zakładamy, że dysponujemy jedynie informacjami o uporządkowaniu dóbr w preferencjach uczestników, ale nie o intensywności chęci uczestników do otrzymania poszczególnych dóbr ani nie o preferencjach uczestników na loteriach przydzielających dobra uczestnikom.

Zebranie informacji o preferencjach uczestników podziału na nieskończonym zbiorze loterii wydaje się niemożliwe do przeprowadzenia w praktyce. Proces ten jest możliwy do przeprowadzenia w skończonej liczbie kroków, jeśli uczestnicy podziału mają preferencje von Neumanna-Morgensterna (1947; zob. Luce i Raiffa, 1964: 32–35; Lissowski, 2008: 60–62, 2013: 59–62), a założenie o występowaniu tego typu preferencji u wszystkich uczestników jest wątpliwe – badania psychologiczne wskazują na zauważalne odstępstwa od tej reguły w realnie występujących preferencjach (zob. Kahneman i Tversky, 1984).

Jedną z przyczyn tych odstępstw jest stosunek ludzi do ryzyka. Większość z nich przejawia awersję do ryzyka, gdy prawdopodobieństwo otrzymania dobra jest duże, zaś staje się skłonna do ryzyka, gdy prawdopodobieństwo to jest małe (zob. Kahneman, 2012: 411–426). W przypadku, gdy do podziału jest jedno dobro o znacznej wartości (np. dom o wartości wycenianej przez wszystkich uczestników podziału na 1 000 000 zł), to w sytuacji, gdy uczestników podziału jest niewielu, np. dwóch, skłonni będą sprzedać dobro nawet za kwotę poniżej swoich wycen wartości tego dobra i podzielić się pieniędzmi. W przypadku, gdy uczestników podziału jest bardzo wielu,

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

np. milion, będą oni raczej skłonni do uznawania za atrakcyjniejszą maleńką szansę na otrzymanie cennego domu od pewnego zarobku w wysokości wartości oczekiwanej zakładu (1 zł). Ponadto ludzie wykazują różną skłonność do ryzyka w zależności od tego, czy ewentualny korzystny wynik losowania jest odbierany jako zysk, czy jako uniknięcie straty (Kahneman i Tversky, 1984).

Pomimo że zakładamy dostępność jedynie porządkowych preferencji uczestników podziału, to przyjmujemy jednak, że za preferencjami porządkowymi kryje się jakaś intensywność tych preferencji. Przekłada się ona na preferencje na loteriach, choć preferencje te mogą pozostawać niejawne nawet dla samych uczestników, którzy mogą nie być przyzwyczajeni do porównywania atrakcyjności loterii. W dalszej części artykułu będzie się zakładać, że uczestnicy podziału posiadają użyteczności kardynalne w rozumieniu von Neumanna-Morgensterna na rozdzielanych dobrach, jednak użyteczności te nie są możliwe do zbadania. Oceniając własności procedury, należy uwzględniać wszystkie możliwe profile użyteczności kardynalnych, które są zgodne z danym profilem preferencji, tj. przypisują wyższe użyteczności dobrom stojącym wyżej w hierarchii preferencji uczestnika podziału.

Ad 2.

Zakładamy, że uczestnicy podziału oceniają wyniki procedur probabilistycznych (czyli macierze prawdopodobieństw), uwzględniając jedynie prawdopodobieństwa uzyskania przez nich samych poszczególnych dóbr. Na ocenę uczestnika nie wpływa zatem m.in. korzystność lub niekorzystność wyniku dla innych uczestników podziału (którzy mogą być przez niego lubiani lub nielubiani) czy ogólna ocena sprawiedliwości wyniku (na temat innych typów preferencji zob. Lissowski, 2008: 50–53, 57–58, 62–63; 2013: 50–53, 57–58, 62–63).

Ad 3.

Opisywane procedury są pomyślane jako narzędzie do losowego przydzielania dóbr w sytuacji, gdy liczba tych dóbr jest równa liczbie uczestników podziału. Jest to znaczące uproszczenie, prowadzące do ograniczenia ich stosowalności, jednak pozwalające uniknąć szeregu problemów. Szczególne trudności sprawia sytuacja, w której liczba dóbr jest większa od liczby uczestników podziału. Wówczas co najmniej jeden z uczestników otrzymałby więcej niż jedno dobro. Problem w tym, że użyteczność zestawu dóbr nie musi być równa sumie użyteczności elementów tego zestawu. Wymaga to albo podawania przez uczestników podziału obszerniejszych informacji na temat swoich preferencji (np. uporządkowania wszystkich podzbiorów zbioru dóbr według ich atrakcyjności), albo przyjęcia dodatkowych założeń na ten temat.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Dużo łatwiej przystosować procedurę probabilistyczną do sytuacji, w której dóbr jest mniej niż uczestników podziału. W tym celu można utworzyć techniczne „puste dobro", którego otrzymanie jest równoważne z nieotrzymaniem żadnego dobra. W odróżnieniu od pozostałych dóbr, otrzymanie „pustego dobra" przez któregoś z uczestników nie wyklucza możliwości otrzymania tego „dobra" również przez innych uczestników (zob. np. Szaniawski, 1975: 449). Wymaga to jednak pewnych modyfikacji procedur w celu przystosowania ich do sytuacji występowania takiego niewyczerpywalnego dobra. Alternatywnym sposobem jest stworzenie odpowiednio dużej liczby wyczerpywalnych „pustych dóbr", jednak nie daje się to pogodzić z założeniem 1., gdyż uczestnicy podziału byliby indyferentni między poszczególnymi „pustymi dobrami".

Wymóg, by każdy uczestnik podziału otrzymał dokładnie jedno dobro, ma na celu obniżenie poziomu nierówności powstałych w wyniku losowania. W przeciwnym wypadku możliwa byłaby sytuacja, w której w wyniku losowania wszystkie dobra trafiłyby do jednego uczestnika, pozostali zaś odeszliby z pustymi rękami.

Ze względu na równoliczność zbioru uczestników podziału i rozdzielanych dóbr, alokacje deterministyczne będą reprezentowane przez macierze kwadratowe $n \times n$. Skoro każdy uczestnik otrzymuje dokładnie jedno dobro, to suma elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie tej macierzy wynosi 1. Macierze o tej cesze, której elementy są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, nazywa się macierzami podwójnie stochastycznymi. Macierze reprezentujące alokacje deterministyczne są szczególnym przypadkiem macierzy podwójnie stochastycznych – każdy element tych macierzy jest równy 0 lub 1. Przy ustalonym przyporządkowaniu uczestników podziału do wierszy i dóbr do kolumn istnieje $n!$ macierzy alokacji deterministycznych. Możliwe jest także przedstawienie alokacji deterministycznej jako wektora o n elementach, którego i-ty element oznacza dobro otrzymane przez i-tego uczestnika podziału.

Także macierze prawdopodobieństw będą przy tym założeniu kwadratowymi macierzami podwójnie stochastycznymi rozmiarów $n \times n$. Dla każdego przypadku przy $n > 1$ liczba możliwych macierzy prawdopodobieństw jest nieskończenie duża.

Ad 4.

Zakładamy, że żaden z uczestników nie ma większego uprawnienia do dzielonego zbioru dóbr od innych uczestników, np. ze względu na większe zasługi w pozyskaniu tego zbioru czy bliższy stopień pokrewieństwa ze spadkodawcą. Wszystkie procedury omawiane w niniejszym artykule są anonimowe, tj. nie biorą pod uwagę żadnych cech uczestników podziału poza zadeklarowanymi porządkowymi preferencjami na rozdzielanych dobrach (por. Kuc, 2000: 169, Lissowski, 2008: 349–350; 2013: 351).

3. Opis procedur

Niniejszy rozdział zawiera przegląd wybranych probabilistycznych procedur podziału zbioru dóbr niepodzielnych. Niektóre z nich zawsze prowadzą do tych samych macierzy prawdopodobieństw co jakaś inna procedura. Taką parę procedur będziemy nazywać procedurami równoważnymi. Niektóre z procedur probabilistycznych przedstawionych w tym artykule są sobie równoważne. Siłą rzeczy będą one posiadać te same własności formalne, omówione w sekcji 4.

Zestawienie procedur wzajemnie równoważnych pozwala lepiej zrozumieć istotę poszczególnych procedur, podobnie jak zestawienie różnych aksjomatyzacji tych samych wielkości. Ponadto może mieć ono bardzo praktyczne zastosowanie przy wyborze algorytmów losowania w realnych sytuacjach podziału – spośród procedur prowadzących do tych samych rozwiązań o pożądanych cechach można wybrać takie, które jest najpraktyczniejsze ze względu na inne cechy, np. zrozumiałość, perswazyjność, prostota obliczeń.

3.1. Losowanie z rozkładu równomiernego (LRR)

Losowanie z rozkładu równomiernego to najprostsza procedura probabilistyczna. Polega ona na wylosowaniu alokacji deterministycznej, przy czym każda możliwa alokacja ma takie same szanse na bycie wylosowaną. W rezultacie każdemu z n uczestników podziału procedura ta przypisuje szansę $1/n$ na otrzymanie poszczególnych dóbr. W niniejszym artykule taka macierz prawdopodobieństw będzie nazywana *macierzą równych prawdopodobieństw*.

Omawiana procedura w ogóle nie bierze pod uwagę preferencji uczestników. W pewnych specyficznych sytuacjach może być to uznane za zaletę, gdy istnieje potrzeba zapewnienia równych szans uczestnikom, niezależnie od ich preferencji (np. losowanie par w ligach sportowych czy losowanie na początku partii szachowej, który gracz będzie grał białymi, a który czarnymi), jednak w klasycznym problemie podziału zbioru dóbr generalnie jest istotną wadą, gdyż nie można wykorzystać różnic w upodobaniach uczestników do wygenerowania rozwiązania korzystniejszego dla nich. Pomimo tej cechy procedura ta bywa stosowana w praktyce ze względu na prostotę, intuicyjność i trudną do zakwestionowania równość w traktowaniu uczestników podziału. Może ona także stanowić punkt odniesienia dla pozostałych procedur – można żądać, aby procedura za każdym razem generowała rozwiązanie, które jest dla każdego uczestnika nie gorsze niż przy losowaniu z rozkładu równomiernego.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

3.2. Leksykograficzna procedura równych szans satysfakcji (L-RSS)

Zasada równych szans satysfakcji Szaniawskiego (1966, 1975, 1979) wymaga, aby każdy uczestnik podziału miał takie same szanse na otrzymanie dobra znajdującego się na określonej pozycji w jego hierarchii preferencji, jak pozostali uczestnicy na otrzymanie dóbr zajmujących to samo miejsce w ich hierarchiach preferencji:

$$\forall i, j \in G, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n: \quad Q(i_k) = Q(j_k),$$

gdzie $Q(i_k)$ oznacza prawdopodobieństwo otrzymania przez i-tego uczestnika podziału dobra, które zajmuje k-tą pozycję w jego profilu preferencji.

Dla każdego profilu preferencji istnieje przynajmniej jedna macierz prawdopodobieństw zgodna z zasadą równych szans satysfakcji – taka, w której każdy uczestnik ma szansę równą $1/n$ na otrzymanie poszczególnych dóbr (czyli macierz równych prawdopodobieństw, zob. 3.1.). Jak zauważył sam Szaniawski, w szerokiej klasie przypadków istnieje więcej macierzy zgodnych z omawianą zasadą. Oznacza to, że zasada równych szans satysfakcji nie musi jednoznacznie wyznaczać macierzy prawdopodobieństw. Pokazuje to poniższy przykład:

Tabela 1
Profil preferencji nr 1

Uczestnicy \ dobra	d_1	d_2
g_1	1	2
g_2	2	1

Dla profilu preferencji nr 1 (Tabela 1) istnieje nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek równych szans satysfakcji, przypisujących obu uczestnikom szansę równą p na otrzymanie wyżej cenionego dobra i 1-p na otrzymanie mniej lubianego dobra.

Zasada równych szans satysfakcji nie jest zatem probabilistyczną procedurą według definicji przyjętej w niniejszym artykule. Można by ją traktować jako procedurę probabilistyczną w przypadku, gdyby rozluźnić definicję i przyjąć, że przeciwdziedziną procedur probabilistycznych nie są podwójnie stochastyczne macierze prawdopodobieństw, ale niepuste zbiory takich macierzy. Takie podejście w kontekście zasady równych szans satysfakcji można spotkać zarówno u jej Autora, jak i w pracach późniejszych (Kuc, 2000, Lissowski, 2006).

Aby z zasady równych szans satysfakcji uczynić procedurę w rozumieniu definicji przyjętej w tym artykule, należy wskazać sposób wyboru pojedynczej macierzy prawdopodobieństw spośród wszystkich macierzy zgodnych z tą zasadą. W niniejszym artykule proponuję następującą regułę leksykograficzną: jeśli istnieje więcej niż jedna macierz prawdopodobieństw zgodna z zasadą równych szans satysfakcji, to wybieramy z nich te macierze, w których prawdopodobieństwo otrzymania najwyżej cenionego dobra (równe dla wszystkich uczestników) jest największe. Jeśli nadal mamy więcej niż jedną macierz, to wybieramy z nich te, w których największe jest prawdopodobieństwo otrzymania dobra zajmującego drugą pozycję w hierarchii preferencji itd., aż do uzyskania pojedynczej macierzy. Podstawową zaletą proponowanej reguły jest jej prostota i intuicyjność.

Powyższy algorytm zawsze pozwoli wybrać dokładnie jedną macierz – jeśli po pierwszym kroku została nadal więcej niż jedna macierz, to macierze te mogą się różnić jedynie prawdopodobieństwami otrzymania przez uczestników n-1 najmniej preferowanych dóbr. Macierze po drugim kroku mogą różnić się prawdopodobieństwami uzyskania otrzymania przez uczestników n-2 najmniej preferowanych dóbr, itd. Po odpowiednio dużej liczbie kroków otrzymamy macierze, które nie będą mogły się różnić pod żadnym względem, a zatem będzie to musiała być pojedyncza macierz.

Sposób obliczania wynikowej macierzy prawdopodobieństw ilustruje poniższy przykład.

Dany jest rozkład preferencji trzech uczestników podziału g_1, g_2 i g_3 na trzech dobrach d_1, d_2 i d_3.

Tabela 2
Profil preferencji nr 2

	d_1	d_2	d_3
g_1	1	2	3
g_2	3	1	2
g_3	2	1	3

Istnieje 3! = 6 deterministycznych alokacji dóbr przypisujących każdemu uczestnikowi po jednym z dóbr:

A: $[d_1, d_2, d_3]$

B: $[d_1, d_3, d_2]$

C: $[d_2, d_1, d_3]$

D: $[d_2, d_3, d_1]$

E: $[d_3, d_1, d_2]$

F: $[d_3, d_2, d_1]$

Zgodnie z zasadą równych szans satysfakcji wszyscy uczestnicy podziału muszą mieć równe szanse na otrzymanie ulubionego dobra. Uczestnik g_1 otrzymuje swoje

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

ulubione dobro w podziałach A i B, uczestnik g_2 w podziałach A i F, a uczestnik g_3 w podziałach B i E. Stąd, aby szanse uzyskania ulubionego dobra były równe dla wszystkich uczestników, musi zachodzić równość:

$$P(A) + P(B) = P(A) + P(F) = P(B) + P(E).$$

Aby zapewniona była równość szans otrzymania dóbr zajmujących drugie miejsce w hierarchii preferencji uczestników, musi być spełniona równość:

$$P(C) + P(D) = P(B) + P(D) = P(D) + P(F),$$

Skoro do podziału są trzy dobra, a uczestnicy mają równe szanse na otrzymanie najwyżej cenionego dobra oraz drugiego najwyżej cenionego dobra, a każdy uczestnik musi otrzymać jakieś dobro, to szanse na otrzymanie najniżej cenionego dobra również muszą być równe.

Z powyższego układu równań wynika, że

$$P(A) = P(E)$$

oraz

$$P(B) = P(C) = P(F).$$

Ponieważ musi zostać wskazany dokładnie jeden podział deterministyczny

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = 1,$$

co w zestawieniu z dwoma wcześniejszymi równaniami prowadzi do tego, że

$$2P(A) + 3P(B) + P(D) = 1.$$

Istnieje nieskończenie wiele kombinacji prawdopodobieństw spełniających te warunki. Kilka przykładów można znaleźć w Tabeli 3.

Tabela 3
Przykładowe loterie na podziałach deterministycznych spełniające zasadę równych szans satysfakcji w odniesieniu do profilu preferencji nr 2 (zob. Tabela 2)

	Loteria 1	Loteria 2	Loteria 3	Loteria 4	Loteria 5
A: [d_1, d_2, d_3]	½	0	0	1/6	1/6
B: [d_1, d_3, d_2]	0	1/3	0	0	1/6
C: [d_2, d_1, d_3]	0	1/3	0	0	1/6
D: [d_2, d_3, d_1]	0	0	1	2/3	1/6
E: [d_3, d_1, d_2]	½	0	0	1/6	1/6
F: [d_3, d_2, d_1]	0	1/3	0	0	1/6

Wybór konkretnej loterii spośród nich powinien być podyktowany tym, by była ona możliwie najkorzystniejsza dla uczestników podziału. Szaniawski zaproponował, aby wszystkim alokacjom, które nie są optymalne w mocnym sensie Pareto[2], przypisywać zerowe prawdopodobieństwo wylosowania, jednak wykazał, że istnieją profile preferencji, dla których propozycja ta jest nie do pogodzenia z warunkiem równych szans satysfakcji (1966, 1975, 1979).

W leksykograficznej procedurze równych szans satysfakcji nie występuje wspomniany wyżej problem niepełnej dziedziny, a wybór rozwiązania możliwie korzystnego dla uczestników odbywa się poprzez opisaną przed chwilą procedurę.

Spośród nieskończenie wielu loterii spełniających warunek równych szans satysfakcji, uczestnicy uzyskają najwyższe prawdopodobieństwo otrzymania ulubionego dobra przy wyborze loterii 1. W rezultacie otrzymamy następującą macierz prawdopodobieństw:

Tabela 4
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę L-RSS na podstawie profilu preferencji nr 2 (zob. Tabela 2)

	d_1	d_2	d_3
g_1	1/2	0	1/2
g_2	1/2	1/2	0
g_3	0	1/2	1/2

Tabela 5
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury L-RSS dla profilu preferencji nr 2 (zob. Tabela 2)

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	1/2	0	1/2
g_2	1/2	0	1/2
g_3	1/2	0	1/2

3.3. Procedura równych szans wyboru (RSW)

Procedura ta została po raz pierwszy opisana przez Klemensa Szaniawskiego (1966, 1975, 1979). W literaturze przedmiotu funkcjonuje także pod innymi nazwami: *random serial dictatorship* (zob. np. Abdulkadiroğlu i Sönmez, 1998) i *random priority* (zob. np. Bogomolnaia i Moulin, 2001; Kesten, 2006, 2009).

[2] Alokacja optymalna w mocnym sensie Pareto to taka, dla której nie istnieje inna alokacja, która byłaby nie mniej korzystna dla wszystkich uczestników podziału i jednocześnie bardziej korzystna dla co najmniej jednego z nich.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

W procedurze tej dokonuje się losowania kolejności uczestników podziału, przy czym każda możliwa kolejność ma jednakową szansę na bycie wylosowaną. Dla każdej kolejności uczestników wyznacza się alokację, która jest konsekwencją jej i profilu preferencji uczestników. Procedura ta generuje loterię na alokacjach, w której prawdopodobieństwo wylosowania danej alokacji jest wprost proporcjonalne do tego, ile spośród możliwych uporządkowań uczestników prowadzi do tej alokacji.

Wyznaczanie alokacji dla konkretnej kolejności uczestników podziału przebiega następująco: uczestnicy w wylosowanej kolejności wskazują najwyżej cenione przez nich dobro spośród tych, które jeszcze nie zostały wskazane przez innego uczestnika. Zatem pierwszy uczestnik wskazuje swoje ulubione dobro z całego zbioru n dóbr, drugi swoje ulubione dobro spośród pozostałych n-1 dóbr itd. Następnie każdemu uczestnikowi przyporządkowuje się wskazane przez niego dobro.

Tabela 6
Profil preferencji nr 3

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	1	2	3	4
g_2	1	2	3	4
g_3	2	1	4	3
g_4	2	1	4	3

Prześledźmy działanie procedury na przykładzie, zakładając, że uczestnicy podziału mają takie preferencje, jak podane w Tabeli 6. Losujemy kolejność uczestników, przy czym każde uporządkowanie uczestników ma takie same szanse na bycie wylosowanym. Przypuśćmy, że wylosowano kolejność g_2, g_3, g_1, g_4. Uczestnik g_2 wskazuje swoje ulubione dobro d_1. Następnie wyboru dokonuje uczestnik g_3. Jego ulubione dobro d_2 nadal jest dostępne, więc je wskazuje. Potem uczestnik g_1 wybiera jedno z dóbr. Jego dwa ulubione dobra, d_1 i d_2, zostały już wskazane przez uczestników zajmujących wyższe miejsca w kolejce. Spośród pozostałych dwóch dóbr uczestnik g_1 woli dobro d_3, więc je wskazuje. Ostatni uczestnik, g_4, wskazuje jedyne dobro, jakie pozostało – d_4. Wszyscy uczestnicy otrzymują wskazane przez siebie dobra.

Powtarzając algorytm dla wszystkich możliwych kolejności dokonywania wyborów przez uczestników (pamiętając, że każde uporządkowanie jest jednakowo prawdopodobne), uzyskujemy macierz prawdopodobieństw przedstawioną w Tabeli 7:

Tabela 7
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę RSW na podstawie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	5/12	1/12	5/12	1/12
g_2	5/12	1/12	5/12	1/12
g_3	1/12	5/12	1/12	5/12
g_4	1/12	5/12	1/12	5/12

Tabela 8
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury RSW dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	trzecie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	5/12	1/12	5/12	1/12
g_2	5/12	1/12	5/12	1/12
g_3	5/12	1/12	5/12	1/12
g_4	5/12	1/12	5/12	1/12

W omawianym przypadku każdy uczestnik podziału ma identyczną szansę na otrzymanie dobra zajmującego konkretne miejsce w jego hierarchii preferencji, jednak procedura RSW nie generuje wyłącznie takich rozwiązań – np. w sytuacji, gdy któryś uczestnik najwyżej ceni dobro, które jest najmniej cenione przez każdego z pozostałych uczestników, to uczestnik ten ma pewność, że w wyniku procedury RSW otrzyma swoje ulubione dobro. Dla pozostałych uczestników prawdopodobieństwo to może być jednak mniejsze od 1.

3.4. *Core from random endowments* (CfRE)

Abdulkadiroğlu i Sönmez (1998) opisali procedurę złożoną z dwóch etapów. Pierwszym jest wylosowanie startowej alokacji z rozkładu równomiernego, jak ma to miejsce w pierwszej z opisanych procedur (zob. 3.1). Zatrzymanie się w tym punkcie miałoby wyraźną wadę – wylosowane alokacje mogą być nieoptymalne, a uczestnicy podziału mogliby zyskać, wymieniając się otrzymanymi dobrami. Drugim etapem omawianej procedury jest właśnie wymiana dóbr zgodnie z algorytmem *top trading cycles* (TTC), wymyślonym przez Gale'a, a opisanym przez Shapleya i Scarfa (1974).

Prześledźmy działanie procedury na przykładzie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Przypuśćmy, że z rozkładu równomiernego wylosowano alokację startową, w której uczestnik g_1 wylosował dobro d_3, uczestnik g_2 – dobro d_2, uczestnik g_3 – dobro d_1, zaś uczestnik g_4 – dobro d_4. Dla tak wylosowanej alokacji przeprowadzony zostaje algorytm *top trading* cycles, który przebiega następująco.

Każdy z uczestników wskazuje na tego uczestnika, który jest aktualnie w posiadaniu jego ulubionego dobra, zatem uczestnicy g_1 i g_2 wskazują na uczestnika g_3, zaś uczestnicy g_3 i g_4 – na uczestnika g_2. Powstanie w ten sposób co najmniej jeden *cykl* co najmniej jednoelementowy. Cyklem i-elementowym nazywamy układ, w którym i uczestników wskazuje na siebie „w kółko", tj. pierwszy na drugiego, drugi na trzeciego,... a i-ty na pierwszego. Liczba osób w pojedynczym cyklu może wynosić od 1 (w przypadku, gdy uczestnik wskazuje na samego siebie, gdyż wylosował swoje ulubione dobro) do n, gdy cykl obejmuje wszystkich uczestników podziału. W naszym przykładzie uczestnicy g_2 i g_3 tworzą dwuelementowy cykl, zaś pozostali uczestnicy nie należą do żadnego cyklu.

Każdy uczestnik podziału znajdujący się w jakimś cyklu otrzymuje dobro od uczestnika, na którego wskazał i przekazuje dobro temu uczestnikowi, który wskazał na niego. Wszyscy uczestnicy cyklu wraz z otrzymanymi dobrami zostają wyłączeni z dalszych wymian. Zatem uczestnik g_2 otrzymuje dobro d_1, a uczestnik g_3 otrzymuje dobro d_2. Uczestnicy ci wraz z otrzymanymi dobrami zostają wyłączeni z dalszych wymian.

Pozostali uczestnicy powtarzają proces wymiany w pomniejszonym składzie do momentu, gdy wszyscy uczestnicy zostaną wyłączeni z dalszych wymian. Obaj pozostali uczestnicy – g_1 i g_4 – wskazują na aktualnych właścicieli najbardziej preferowanych przez siebie dóbr spośród tych, które nie zostały jeszcze wyłączone z wymian (tj. wszystkich dóbr oprócz d_1 i d_2). Obaj uczestnicy pokazują na samych siebie, gdyż każdy z nich posiada to spośród dwóch pozostałych dóbr, które wyżej ceni. W konsekwencji tworzą dwa jednoelementowe cykle. Stają się tym samym właścicielami wylosowanych dóbr i zostają wyłączeni z dalszych wymian. Procedura zostaje zakończona. Uczestnik g_1 otrzymał dobro d_3, uczestnik g_2 – dobro d_1, uczestnik g_3 – dobro d_2,zaś uczestnik g_4 – dobro d_4.

W podobny sposób wyznacza się alokacje końcowe dla pozostałych możliwych alokacji startowych. Każda alokacja startowa ma jednakowe prawdopodobieństwo na bycie wylosowaną. Informacje te wystarczają do wyznaczenia macierzy prawdopodobieństw. Macierz dla profilu preferencji nr 3 znajduje się w Tabeli 9.

Tabela 9
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę CfRE na podstawie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	5/12	1/12	5/12	1/12
g_2	5/12	1/12	5/12	1/12
g_3	1/12	5/12	1/12	5/12
g_4	1/12	5/12	1/12	5/12

Tabela 10
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury CfRE dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	trzecie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	5/12	1/12	5/12	1/12
g_2	5/12	1/12	5/12	1/12
g_3	5/12	1/12	5/12	1/12
g_4	5/12	1/12	5/12	1/12

Choć może być to zaskakujące na pierwszy rzut oka, procedura *core from random endowments* generuje macierz prawdopodobieństw identyczną jak generowana przez procedurę równych szans wyboru. Nie jest to przypadek – będzie się tak działo dla każdego profilu preferencji.

Twierdzenie 1. Procedury RSW i CfRE są wzajemnie równoważne.

Dowód (na podst. Abdulkadiroğlu i Sönmez, 1998: 695–700). Obie metody przeprowadzają pewne losowanie – w RSW losuje się kolejność, w jakiej uczestnicy wybierają dobra, zaś w CfRE, losuje się początkowe przyporządkowanie dóbr do osób. Kolejność, w jakiej n uczestników wybiera dobra, da się wylosować na $n!$ sposobów. Możliwych sposobów początkowego przypisania n dóbr do n osób również jest $n!$. Wystarczy zatem wykazać, że:

- każdej możliwej alokacji startowej da się przypisać taką kolejność wybierania dóbr przez uczestników, która przy RSW prowadzi do takiego samego wyniku, co ta alokacja przy CfRE, a jednocześnie
- żadnym dwóm różnym alokacjom startowym nie przypiszemy tej samej kolejności uczestników.

W CfRE wymiana n dóbr między n uczestnikami trwa od 1 tury (w przypadku, gdy każdy uczestnik ma inne ulubione dobro) do n tur (np. gdy wszyscy uczestnicy mają jednakowe preferencje). Warto zauważyć, że uczestnicy należący do jakiegoś cyklu w pierwszej turze mają inne ulubione dobro – gdy-

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

by kilku uczestników miało to samo ulubione dobro, to co najwyżej jeden z nich mógłby być elementem jakiegoś cyklu w pierwszej turze. Analogicznie, uczestnicy należący do jakiegoś cyklu w tej samej turze z pewnością mają inne ulubione dobro spośród tych, które pozostały po poprzednich turach.

Aby uzyskać przy użyciu RSW taki sam podział końcowy, jak w przypadku CfRE przy ustalonej acz dowolnej alokacji startowej, wystarczy wylosować taką kolejność dokonywania wyborów przez uczestników, w której dobra wybierają wpierw uczestnicy, którzy w CfRE należeli do cyklu w pierwszej turze, potem ci, którzy byli w jakimś cyklu w drugiej turze etc. Ustawienie „wewnątrz cyklu" jest bez znaczenia – jak zostało już przed chwilą wspomniane, żadna para takich osób nie może mieć takiego samego ulubionego dobra spośród tych, które jeszcze są do wyboru. Skoro kolejność wybierania „wewnątrz tury" nie ma znaczenia, możemy uczestników należących do cyklu w tej samej turze ustawić w kolejności rosnącej według oznaczenia dobra, które otrzymali w alokacji startowej w CfRE (np. oznaczamy dobra literami i ustawiamy osoby z tej samej tury w kolejności alfabetycznej dóbr, które zostały im przypisane w alokacji startowej). Wyznacza nam to już w sposób jednoznaczny dopasowanie kolejności uczestników w RSW do alokacji startowej w CfRE, przy czym żadnym dwóm alokacjom startowym nie zostanie przypisana taka sama kolejność uczestników.

Warto zauważyć, że dopasowane w ten sposób ustawienia uczestników przy użyciu RSW dają ten sam wynik, co alokacje w CfRE, do których są przypisane. Ci uczestnicy, którzy należeli do jakiegoś cyklu w pierwszej turze CfRE, wybierają jako pierwsi. Ponieważ każdy z nich ma inne ulubione dobro (inaczej któryś z nich nie należałby do cyklu), to przy tej kolejności wyboru każdy z nich otrzyma swoje ulubione dobro. Następnie wyboru dokonują osoby, które należały do jakiegoś cyklu w drugiej turze CfRE. Każdy z nich otrzyma swoje ulubione dobro spośród tych, które nie zostały wybrane przez osoby z pierwszej tury CfRE. Analogicznie będzie również w przypadku osób należących do jakiegoś cyklu w następnych turach – dostaną swoje ulubione dobra spośród tych, które pozostały po poprzednich turach. Łatwo zauważyć, że obie metody (CfRE dla tej alokacji startowej i RSW dla kolejności uczestników przypisanej jej w opisany przed chwilą sposób) prowadzą do tej samej alokacji końcowej.

Należy także podkreślić, że przy użyciu podanego algorytmu każdej alokacji startowej przypisujemy dokładnie jedną kolejność wybierania dóbr przez uczestników. Przypominam, że możliwych alokacji startowych jest tyle samo, co możliwych ustawień uczestników w kolejności, tj. $n!$. Jeśli szansa na wylosowanie każdej alokacji startowej jest taka sama ($1/n!$) i szansa na wylosowanie każdej kolejności dokonywania wyborów przez uczestników jest taka

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

sama (również $1/n!$), a jednocześnie każdej alokacji da się przypisać opisanym powyżej algorytmem jedną kolejność, inną dla każdej alokacji, która to kolejność prowadzi przy RSW do tego samego rezultatu, co ta alokacja startowa w CfRE, to RSW i CfRE prowadzą zawsze do identycznych loterii na alokacjach końcowych.

3.5. *Probabilistic serial* (PS)

Anna Bogomolnaia i Hervé Moulin (2001) przedstawili nowatorską procedurę probabilistyczną. Chociaż w omawianym problemie dystrybuowane dobra są niepodzielne, to jednak prawdopodobieństwo otrzymania dobra niepodzielnego jest doskonale podzielne. Otrzymanie takiego podzielnego dobra w ilości, powiedzmy, 0,27, oznacza otrzymanie odpowiadającego mu dobra niepodzielnego z prawdopodobieństwem 0,27.

Autorzy opisują przebieg procedury, używając metafory jedzenia. Uczestnicy podziału w równym tempie „zjadają" swoje ulubione dobra. Gdy jakieś dobro zostaje całkowicie „zjedzone", uczestnicy, którzy „zjadali" to dobro zaczynają „zjadać" inne dobro – najwyżej przez siebie preferowane spośród tych, które nie zostały jeszcze w pełni „zjedzone". Procedura kończy się w momencie „zjedzenia" ostatniego dobra. Następnie sprawdzamy, jaką część poszczególnych dóbr „zjadł" dany uczestnik. Szansa, że otrzyma on jakieś konkretne dobro, jest równa części tego dobra, którą dany uczestnik „zjadł".

Prześledźmy działanie procedury na przykładzie.

Tabela 11
Profil preferencji nr 4

	d_1	d_2	d_3
g_1	1	2	3
g_2	1	3	2
g_3	2	1	3

Dla profilu preferencji nr 4 (zob. Tabela 11) procedura PS będzie przebiegała następująco. Każdy z uczestników zacznie „zjadać" swoje ulubione dobro: uczestnicy g_1 i g_2 zaczną „zjadać" dobro d_1, zaś uczestnik g_3 – dobro d_2. Uczestnicy „zjadają" dobra w równym tempie, więc w momencie, gdy dobro d_1 zostaje całkowicie „zjedzone"

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

przez uczestników g_1 i g_2, uczestnik g_3 zdążył „zjeść” połowę dobra d_2. Uczestnicy „jedzą” teraz swoje ulubione dobra spośród tych, które nie zostały jeszcze „zjedzone”, zatem g_1 i g_3 „jedzą” dobro d_2 (którego zostało jeszcze pół), zaś uczestnik g_2 – dobro d_3. W momencie, gdy kończy się dobro d_2 („zjedzone” w sumie w trzech czwartych przez uczestnika g_3 i w jednej czwartej przez uczestnika g_1), uczestnik g_2 zdążył „zjeść” ćwierć dobra d_3. Pozostałe trzy czwarte ostatniego dobra zostaje „zjedzone” w równych częściach przez uczestników.

Tabela 12
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę PS na podstawie profilu preferencji nr 4 (zob. Tabela 11)

	d_1	d_2	d_3
g_1	1/2	1/4	1/4
g_2	1/2	0	1/2
g_3	0	3/4	1/4

Tabela 13
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury PS dla profilu preferencji nr 4 (zob. Tabela 11)

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	1/2	1/4	1/4
g_2	1/2	1/2	0
g_3	3/4	0	1/4

Przeprowadzenie procedury PS dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6) pozostawiam Czytelnikowi. Wynikowa macierz prawdopodobieństw przedstawiona jest w Tabeli 14.

Tabela 14
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę PS na podstawie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	1/2	0	1/2	0
g_2	1/2	0	1/2	0
g_3	0	1/2	0	1/2
g_4	0	1/2	0	1/2

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Tabela 15
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury PS dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	najwyżej oceniane dobro	2. najwyżej oceniane dobro	3. najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	1/2	0	1/2	0
g_2	1/2	0	1/2	0
g_3	1/2	0	1/2	0
g_4	1/2	0	1/2	0

3.6. *Top trading cycles from equal division* (TTCfED)

Onur Kesten (2006) zaproponował inną wersję procedury alokacji *n* dóbr między *n* osób, odwołującą się do procedury *top trading cycles*. W tej wersji przedmiotem wymiany nie są jednak niepodzielne dobra, ale pewne „techniczne" podzielne dobra, interpretowane przez Kestena jako uprawnienia do poszczególnych dóbr niepodzielnych. Są to *de facto* prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych dóbr, podobnie jak w procedurze PS. Prawdopodobieństwa otrzymania dóbr są oczywiście dobrami podzielnymi.

Każdy z uczestników podziału rozpoczyna z 1/*n* uprawnień do wszystkich rozdzielanych dóbr niepodzielnych. W trakcie procedury uczestnicy wymieniają się posiadanymi uprawnieniami w proporcji 1:1.

Procedura TTC w swoim pierwotnym kształcie była algorytmem wymiany dóbr między uczestnikami procedury, z których każdy posiada na starcie dokładnie jedno dobro niepodzielne. Kesten dokonał istotnych zmian w procedurze, aby nadawała się do wymiany w sytuacji, w której każdy uczestnik przynosi identyczny zestaw dóbr podzielnych. Prześledźmy przebieg procedury na przykładzie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6).

Traktujemy każdego z uczestników podziału jak *n* pseudouczestników, z których każdy ma uprawnienie do innego dobra. Zatem w naszym przykładzie każdego z uczestników traktujemy jak czterech pseudouczestników wyposażonych w ¼ uprawnień do pojedynczych dóbr, każdy do innego. Pseudouczestnika podległego uczestnikowi g_i, a posiadającego uprawnienia do dobra d_j będziemy oznaczać dalej jako $g_i d_j$. Mamy więc 16 pseudouczestników, zaś w ogólnym przypadku n^2 pseudouczestników.

W procedurze szukamy wyłącznie cykli jedno- i dwuelementowych. Dłuższe cykle są ignorowane. Podobnie jak w oryginalnej procedurze TTC, wymiany odbywają się w turach. Liczba tur nie przekracza *n*.

Jeśli jakiś pseudouczestnik ma na początku tury uprawnienie do dobra najwyżej preferowanego przez swojego „wzorcowego" uczestnika spośród dóbr, do których

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

uprawnienia nie zostały jeszcze wyczerpane, to wskazuje na samego siebie, tworząc jednoosobowy cykl. Posiadane przez niego uprawnienie trafia do jego „wzorca”, stając się elementem końcowych uprawnień prawdziwego uczestnika podziału. Zatem pseudouczestnicy g_1d_1, g_2d_1, g_3d_2 oraz g_4d_2 oddają po ¼ uprawnienia do odpowiadających im dóbr swoim „wzorcowym” uczestnikom.

Następnie, jeśli jakiś pseudouczestnik ma na początku tury uprawnienie do innego dobra niż najwyżej preferowane przez swojego „wzorcowego” uczestnika spośród dóbr, do których uprawnienia nie zostały jeszcze wyczerpane, to wskazuje na wszystkich pseudouczestników, którzy mają udziały dobra najwyżej ocenianego przez „wzorzec” spośród dostępnych dóbr. Zatem pseudouczestnik g_1d_2 wskazuje na pseudouczestników posiadających ulubione dobro uczestnika g_1, tj. dobro d_1. Wskazuje zatem na pseudouczestników g_3d_1 oraz g_4d_1 (lecz nie na pseudouczestnika g_2d_1, gdyż ten „oddał” już całe posiadane uprawnienie swojemu „wzorcowemu” uczestnikowi g_2). Na tych samych pseudouczestników wskazują także pozostali pseudouczestnicy uczestnika g_1. Pseudouczestnicy uczestnika g_2 również wskazują na pseudouczestników g_3d_1 oraz g_4d_1, ponieważ posiadają dobro d_1 – ulubione dobro uczestnika g_2. Pseudouczestnicy uczestników g_3 i g_4 wskazują na pseudouczestników g_1d_2 i g_2d_2, gdyż są oni w posiadaniu dobra d_2, które jest dobrem najwyżej cenionym przez uczestników „wzorcowych” g_3 i g_4.

Wszystkie pary pseudouczestników wskazujących na siebie nawzajem wymieniają się uprawnieniami w proporcji 1:1. W naszym przykładzie tworzą się pary: g_1d_2-g_3d_1, g_1d_2-g_4d_1, g_2d_2-g_3d_1 oraz g_2d_2-g_4d_1.

Każda para dokonuje wymiany w tym samym tempie. Jak widać na przykładzie, pojedynczy pseudouczestnik może należeć do wielu par jednocześnie. Tura kończy się w momencie, w którym któremuś z pseudouczestników skończy się zapas uprawnienia na wymianę. Uprawnienia wymienione do tej pory trafiają do odpowiednich „wzorcowych” uczestników podziału. W naszym przykładzie każdy z wymieniających pseudouczestników należy do dokładnie dwóch par i ma na początku taką samą ilość uprawnień (1/4), zatem uprawnienia wyczerpują się jednocześnie. Każda z takich par przyniosła „wzorcowemu” uczestnikowi 1/8 uprawnień do jego ulubionego dobra. Na tym kończy się pierwsza tura.

Uprawnienia, które nie trafiły jeszcze do żadnego „wzorcowego” uczestnika, będą stanowiły przedmiot wymiany w kolejnych turach. Tworzeni są nowi pseudouczestnicy, każdy odpowiedzialny za uprawnienia do innego dobra. Ich liczba może ulegać zmniejszeniu wraz z wyczerpywaniem się uprawnień do poszczególnych dóbr. W naszym przykładzie po pierwszej turze wyczerpały się dobra d_1 i d_2, zatem w następnej turze pojawi się już tylko po dwóch pseudouczestników od każdego uczestnika. Pseudouczestnicy g_1d_3, g_2d_3, g_3d_4 oraz g_4d_4 oddają po ¼ uprawnienia do odpowiadających im dóbr swoim „wzorcowym" uczestnikom. Tworzą się pary: g_1d_4-g_3d_3, g_1d_4-g_4d_3, g_2d_4-g_3d_3 oraz g_2d_4-g_4d_3. Po drugiej turze wyczerpują się uprawnienia do wszystkich dóbr i procedura się kończy.

Tabela 16
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę TTCfED na podstawie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	1/2	0	1/2	0
g_2	1/2	0	1/2	0
g_3	0	1/2	0	1/2
g_4	0	1/2	0	1/2

Tabela 17
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury TTCfED dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	trzecie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	1/2	0	1/2	0
g_2	1/2	0	1/2	0
g_3	1/2	0	1/2	0
g_4	1/2	0	1/2	0

Tabele 16 i 17 są identyczne jak te, które powstały w wyniku działania procedury PS (Tabele 14 i 15). Nie jest to przypadek – procedury te generują identyczne wyniki dla dowolnego profilu preferencji.

Twierdzenie 2. Procedury PS i TTCfED są wzajemnie równoważne.

Dowód przedstawił Kesten (2006: 17–21).

3.7. Procedura równych szans wyboru z nieskończenie dużym czynnikiem *k* (RSW-*k*-inf)

Procedura ta stanowi szczególny przypadek procedury równych szans wyboru z czynnikiem *k*, wymyślonej przez Onura Kestena (2009). Stanowi pewną modyfikację procedury równych szans wyboru. W wyniku tej zmiany wylosowana kolejność uczestników ma mniejsze znaczenie.

W celu lepszego zrozumienia procedury na początek przedstawiona zostanie procedura w jej ogólnej postaci, a następnie jej wersja przy nieskończenie dużym *k*.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

W dalszych rozdziałach niniejszego artykułu uwzględniona będzie jedynie ta szczególna wersja.

Każde z dóbr zostaje zastąpione taką samą naturalną liczbą żetonów na to dobro. Liczbę tę oznaczmy jako k. Z rozkładu równomiernego losujemy kolejność uczestników, tak jak miało to miejsce w przypadku procedury równych szans wyboru. W każdej z k rund uczestnicy w tej samej, wylosowanej na początku kolejności wybierają po jednym żetonie na swoje ulubione dobra spośród tych, na które nie wybrano jeszcze wszystkich żetonów. W rezultacie każdy uczestnik wybiera łącznie k żetonów. Odsetek żetonów na jakieś dobro wśród wszystkich posiadanych przez uczestnika żetonów jest równy prawdopodobieństwu tego, że ten uczestnik otrzyma to właśnie dobro.

W przypadku, gdy $k = 1$, procedura ta jest w sposób oczywisty równoważna z procedurą równych szans wyboru.

Zobaczmy na przykładzie, jak wygląda procedura dla nieco większej liczby żetonów. Rozważmy macierz preferencji nr 3 (zob. Tabela 6) przy $k = 3$. Losujemy kolejność uczestników z rozkładu równomiernego. Przypuśćmy, że wylosowano kolejność g_2, g_3, g_1, g_4. Uczestnik g_2 wybiera żeton na swoje ulubione dobro d_1. W puli pozostają zatem jeszcze dwa żetony na dobro d_1 oraz po trzy żetony na każde z pozostałych dóbr. Następnie wyboru dokonuje uczestnik g_3 – wybiera żeton na dobro d_2. Potem uczestnik g_1 wybiera żeton na dobro d_1. Ostatni uczestnik, g_4, wybiera żeton na dobro d_2. Następnie uczestnicy wybierają drugi żeton. Uczestnik g_2 zabiera ostatni żeton na dobro d_1, a uczestnik g_3 – ostatni żeton na dobro d_2. Potem uczestnik g_1 wybiera żeton na dobro d_3 – swoje ulubione dobro, na które zostały jeszcze jakieś żetony, a uczestnik g_4 wybiera żeton na dobro d_4. Wreszcie uczestnicy wybierają swój trzeci żeton: uczestnik g_2 wybiera żeton na dobro d_3, uczestnik g_3 na dobro d_4, uczestnik g_3 na dobro d_3, a uczestnik g_4 na dobro d_4. W ostatnim kroku wyznaczana jest macierz prawdopodobieństw w taki sposób, że szansa uzyskania określonego dobra przez danego uczestnika jest równa odsetkowi żetonów na to dobro, jakie udało mu się zebrać. Prawdopodobieństwa dla naszego przykładu znajdują się w Tabeli 18.

Tabela 18.
Prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych dóbr przez uczestników podziału przy zastosowaniu procedury równych szans wyboru z czynnikiem k = 3 dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6) dla wylosowanej kolejności uczestników g_2, g_3, g_1, g_4

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	1/3	0	2/3	0
g_2	2/3	0	1/3	0
g_3	0	2/3	0	1/3
g_4	0	1/3	0	2/3

Tabela 19.
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury równych szans wyboru z czynnikiem k = 3 dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6) dla wylosowanej kolejności uczestników g_2, g_3, g_1, g_4

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	trzecie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	1/3	0	2/3	0
g_2	2/3	0	1/3	0
g_3	2/3	0	1/3	0
g_4	1/3	0	2/3	0

Łatwo zauważyć, że uczestnikom opłaca się być jak najwcześniej w kolejce – daje to szansę na zdobycie większej liczby żetonów na atrakcyjniejsze dobra. Choć uczestnicy g_1 i g_2, mieli identyczne preferencje, to uczestnik g_2 zdołał zebrać lepszy (w ocenie obu tych uczestników) zestaw żetonów – gdy uczestnicy wybierali drugi żeton, uczestnik g_2 otrzymał ostatni żeton na dobro d_1, a późniejszy w kolejce uczestnik g_1 – żeton na dobro d_3, mniej cenione przez nich obu. W ogólności dla każdego uczestnika bycie wcześniej w kolejce jest co najmniej tak opłacalne, jak bycie później (przy założeniu, że pozostali uczestnicy ustawieni są w obu przypadkach w tej samej kolejności).

Naturalnie mogłaby zostać wylosowana inna kolejność uczestników (każdy układ uczestników ma równą szansę na bycie wylosowanym) i wtedy prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych dóbr przez uczestników podziału mogłyby być inne. Macierz prawdopodobieństw jest sumą iloczynów prawdopodobieństw warunkowych pod warunkiem wylosowania danej kolejności i prawdopodobieństwa wylosowania danej kolejności. Wynik znajduje się w Tabeli 20.

Tabela 20
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę równych szans wyboru z czynnikiem k = 3 na podstawie profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	17/36	1/36	17/36	1/36
g_2	17/36	1/36	17/36	1/36
g_3	1/36	17/36	1/36	17/36
g_4	1/36	17/36	1/36	17/36

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Tabela 21
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury równych szans wyboru z czynnikiem k = 3 dla profilu preferencji nr 3 (zob. Tabela 6)

	najwyżej oceniane dobro	najwyżej oceniane dobro	najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	17/36	1/36	17/36	1/36
g_2	17/36	1/36	17/36	1/36
g_3	17/36	1/36	17/36	1/36
g_4	17/36	1/36	17/36	1/36

Uzyskany wynik jest zależny od wartości czynnika k. Przykładowo, dla $k = 1$ wyniki byłyby takie, jak przedstawiono w Tabelach 7 i 8. Zainteresowanego Czytelnika zachęcam do przeprowadzenia obliczeń dla innej wybranej wartości k.

Twierdzenie 3. W przypadku, gdy k jest nieskończenie duże, procedura równych szans wyboru z czynnikiem k (czyli RSW-k-inf) i procedura PS są wzajemnie równoważne.

> **Dowód.** Przy nieskończenie dużym k przewaga uczestników znajdujących się wcześniej w wylosowanej kolejności zmierza do zera – mogą uzyskać co najwyżej jeden żeton więcej na określone dobro, co przy nieskończonej liczbie żetonów nie ma znaczenia. Możemy więc potraktować tę sytuację, jak gdyby uczestnicy wybierali żetony jednocześnie. W każdej rundzie każdy z uczestników wybiera jeden żeton, a zatem uczestnicy pozyskują żetony w równym tempie. Jest to nic innego, jak przedstawienie innymi słowami „równego tempa jedzenia” w procedurze PS. Procedury te dają zawsze identyczny rezultat. Bardziej sformalizowany dowód Czytelnik znajdzie w artykule Kestena (2009: 18–20).

Do tego, by procedura równych szans wyboru z czynnikiem k dała identyczny wynik jak procedura *probabilistic serial*, nie jest konieczne, aby czynnik k był nieskończenie duży.

Twierdzenie 4. Dla każdej skończonej liczby dóbr (i równej jej liczby uczestników podziału) istnieje taka skończona liczba, że dla czynnika k równego tej liczbie procedura RSW-k generuje identyczny wynik jak procedura PS.

> **Dowód.** Liczba taka musi gwarantować, że żaden uczestnik nie będzie miał przewagi z racji zajmowania lepszej pozycji w wylosowanym uporządkowaniu uczestników. Będzie tak, jeśli na końcu każdej rundy, w której zabrano ostatni żeton na jakieś dobro, liczba pozostałych do wzięcia żetonów na poszczególne dobra jest podzielna przez liczbę osób, dla których jest to najlepsze dobro spośród tych, na które pozostały jeszcze żetony.

Własność taką ma np. liczba $[NWW(1,\ldots,n)]^n$, gdzie $NWW(1,\ldots,n)$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność wszystkich liczb naturalnych od 1 do n. Jako pierwsze skończy się to dobro, które wystąpiło najwięcej razy na pierwszym miejscu w preferencjach uczestników podziału (w przypadku remisu – wszystkie dobra o największej liczbie wybierających je uczestników skończą się w tej samej rundzie). Z definicji, $NWW(1,\ldots,n)$ jest podzielne przez każdą liczbę od 1 do n, zatem niezależnie od tego, ilu uczestników wybierało najpopularniejsze dobro, każdy z nich otrzymał taką samą liczbę żetonów na to dobro. Pozostali uczestnicy również otrzymali taką liczbę żetonów na swoje ulubione dobra. Jak łatwo zauważyć, liczba ta jest podzielna przez $[NWW(1,\ldots,n)]^{n-1}$, podobnie jak liczba pozostałych żetonów na każde z dóbr. Gdy nastąpi kolejna runda, na koniec której skończą się żetony na dane dobro, liczba żetonów wciąż obecnych przy poszczególnych dobrach będzie podzielna przez $[NWW(1,\ldots,n)]^{n-2}$ itd. W rezultacie liczba żetonów na każde z dóbr na początku każdej rundy jest z pewnością podzielna przez liczbę osób, które będą chciały otrzymać żeton na to dobro w tej rundzie, a przez to kolejność dokonywania wyboru przez uczestników nie będzie miała znaczenia.

Łatwo zauważyć, że jeśli w pewnym momencie wszyscy uczestnicy będą wybierali to samo dobro d, to w momencie, gdy skończą się żetony na to dobro, liczba żetonów na inne dobra będzie taka sama, jak w momencie, gdy wszyscy zaczęli wybierać żetony na dobro d. Nie ma zatem potrzeby gwarantowania n-krotnej podzielności liczby żetonów przez n – wystarczy jednokrotna. W rezultacie wystarczającą liczbą będzie już $n[NWW(1,\ldots,n-1)]^n$ żetonów.

Podsumowując, procedura równych szans wyboru i procedura *core from random endowments* są sobie równoważne. Wzajemnie równoważne są także procedury: *probabilistic serial*, *top trading cycles from equal division* oraz procedura równych szans wyboru z nieskończenie dużym czynnikiem k. Dzięki temu procedury opisywane w niniejszym artykule da się tak podzielić na cztery grupy, że procedury wewnątrz każdej z grup są wzajemnie równoważne:

1. LRR
2. L-RSS
3. RSW = CfRE
4. PS = TTCfED = RSW-k-inf

Oczywiście nie każda procedura probabilistyczna musi należeć do którejś z tych czterech grup procedur. Grup takich jest tyle, ile istnieje kombinacji przypisywania macierzy prawdopodobieństw do profili preferencji. Nawet dla pojedynczego profilu preferencji istnieje nieskończenie wiele macierzy prawdopodobieństw, jakie procedura mogłaby dla niego wygenerować, zatem możliwych grup procedur jest nieskoń-

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

czenie wiele. W sposób oczywisty podział na skończoną liczbę równoważnych grup procedur jest niemożliwy.

Procedury wewnątrz grup, choć prowadzą do tych samych rozwiązań, różnią się algorytmem dochodzenia do tego wyniku. Mogą przez to lepiej lub gorzej nadawać się do wykorzystania w określonym kontekście społecznym. Procedura RSW ustawia uczestników w określonej kolejności, przez co w bardziej jawny sposób niż procedura CfRE faworyzuje osoby, które miały szczęście w losowaniu. Natomiast procedura CfRE może prowadzić do dyskomfortu psychicznego uczestników w sytuacji, w której w cyklu wymian należy oddać dobro nielubianemu uczestnikowi. Procedura RSW wydaje się zatem lepsza do zastosowania w sytuacji konfliktu między uczestnikami, zaś CfRE – gdy uczestnicy się wzajemnie lubią.

Procedura PS wydaje się najprostszą procedurą z całej grupy 4, co stanowi jej dużą zaletę. Jednak procedura RSW-k-inf, zwłaszcza w wersji ze skończonym k prowadzącym do tego samego wyniku co nieskończenie duże k (zob. Twierdzenie 4), może się okazać bardziej perswazyjna. Dla małych wartości n (a przez to umiarkowanych wartości $k=n[NWW(1,\ldots,n-1)]^n$) można prosić uczestników o wybieranie kolejno po jednym żetonie. Dla większych wartości n praktyczniej jest poprosić o wskazanie najwyżej preferowanego dobra spośród tych, na które jeszcze zostały żetony, i rozdzielenie żetonów między uczestników zgodnie z algorytmem. Zarówno procedura PS jak i RSW-k-inf sprawiają wrażenie rywalizacji między uczestnikami podziału poprzez wzajemne „podbieranie" dóbr. Nadają się zatem dobrze do sytuacji konfliktu (lub neutralności) między uczestnikami podziału. Jeśli uczestnicy darzą się wzajemną sympatią, uczestnik może się poczuć niezręcznie z powodu zmniejszania puli żetonów zbieranych przez kolegę lub „zjadanego" przez niego dobra. Wówczas właściwszą procedurą wydaje się TTCfED, w której uczestnicy dla obopólnej korzyści wymieniają między sobą uprawnienia do dóbr. Mankamentem tej procedury jest jednak jej względna złożoność.

4. Pożądane własności procedur probabilistycznych

Kiedy podejmuje się próby zastosowania procedur probabilistycznych w praktyce, staje się przed niełatwym wyborem – którą z procedur należy wybrać? Kluczowym kryterium są tutaj własności zarówno samych procedur, jak też generowanych przez nie podziałów. Niniejsza sekcja zawiera listę wybranych pożądanych cech wraz z informacją, które z omawianych procedur posiadają te cechy.

Ponieważ niektóre procedury są wzajemnie równoważne, tj. zawsze prowadzą do identycznych macierzy prawdopodobieństw, posiadają one także identyczne zestawy cech. Wystarczy zatem udowodnić występowanie lub nie danej właściwości dla jednej procedury, by udowodnić zarazem analogiczną właściwość procedur jej równoważnych.

Rozważane postulaty będą zdefiniowane przy założeniu, że mamy od czynienia z sytuacją problemu podziału zbioru dóbr niepodzielnych z użyciem losowań. Istnieją także tak samo nazwane postulaty dla innych założeń (np. niedopuszczalność loterii, możliwość transferów pieniężnych między uczestnikami podziałów, znajomość użyteczności kardynalnych). Czuję się zatem w obowiązku uprzedzić Czytelnika, że może się spotkać w innych tekstach z nieco inaczej sformułowanymi definicjami tak samo nazwanych postulatów.

Rozwiązania generowane przez procedury probabilistyczne nie są konkretnymi deterministycznymi alokacjami, ale macierzami prawdopodobieństw opisującymi prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych dóbr przez poszczególnych uczestników. W konsekwencji postulaty odwoływać się będą do cech samych zestawów prawdopodobieństw (a więc dokonując oceny *ex ante*), nie zaś do tego, które dobro ostatecznie trafi do kogo w wyniku przeprowadzenia losowania zgodnego z tymi prawdopodobieństwami (a więc nie dokonując oceny *ex post*).

Ponieważ dysponujemy jedynie porządkowymi preferencjami uczestników na rozdzielanych dobrach, zaś niektóre własności rozważane w literaturze odwołują się do użyteczności kardynalnych, w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że uczestnicy przypisują jakieś użyteczności kardynalne dobrom w sposób zgodny ze swoimi preferencjami porządkowymi, jednak same użyteczności nie są znane. Nawet sami uczestnicy podziału mogą nie do końca być ich świadomi. Postulaty odwołujące się do użyteczności kardynalnych będą przedstawiane w dwóch wersjach – mocnej i słabej. Mocna własność oznacza, że warunek jest spełniony dla każdego profilu użyteczności kardynalnych. O własności słabej mówimy w sytuacji, gdy dla każdego profilu preferencji porządkowych istnieje co najmniej jeden taki profil użyteczności kardynalnych zgodny z profilem preferencji, dla którego dany warunek jest spełniony.

4.1. Porządkowa optymalność

Za autorów tej koncepcji w literaturze przedmiotu powszechnie uchodzą Bogomolnaia i Moulin (2001: 303), lecz warto wspomnieć, że koncepcja ta pojawiła się nieco wcześniej pod inną nazwą, w powstałym niezależnie, mniej znanym tekście Kuc (2000: 181–182).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Do zdefiniowania porządkowej optymalności potrzebne będzie pojęcie *dominacji stochastycznej*.

Definicja. Macierz prawdopodobieństw *m'* dominuje stochastycznie macierz *m* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego uczestnika podziału dla dowolnej liczby naturalnej *k* od 1 do *n* szansa na otrzymanie jednego z *k* najlepszych dóbr jest nie mniejsza w przypadku macierzy *m'* niż dla macierzy *m*, a jednocześnie istnieje co najmniej jeden przypadek, w którym ta szansa jest większa dla macierzy *m'* niż dla macierzy *m*. Oznaczmy prawdopodobieństwa związane z macierzą *m* przez *Q*, a z macierzą *m'* przez *Q'*. Macierz *m'* dominuje stochastycznie macierz *m* wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\left(\forall g \in G, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \colon \sum_{i=1}^{k} Q'(g_i) \geq \sum_{i=1}^{k} Q(g_i)\right) \wedge \left(\exists h \in G, \exists j \in \mathbb{N}, j \leq n \colon \sum_{i=1}^{j} Q'(h_i) > \sum_{i=1}^{j} Q(h_i)\right)$$

Definicja. Macierz spełnia warunek porządkowej optymalności wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje żadna inna macierz, która dominowałaby ją stochastycznie.

Definicja. Procedura probabilistyczna jest porządkowo optymalna wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek porządkowej optymalności.

Twierdzenie 5. Procedura PS jest porządkowo optymalna.

Dowód przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001: 315).

Twierdzenie 6. Procedury LRR i RSW nie są porządkowo optymalne.

Dowód. Widać to na przykładzie rozwiązań generowanych przez te metody dla przedstawionego w Tabeli 6 profilu preferencji nr 3. Pierwsza z nich generuje macierz równych prawdopodobieństw, druga macierz przedstawioną w Tabeli 7. Rozwiązania generowane przez obie procedury są zdominowane stochastycznie przez rozwiązanie przypisujące wszystkim uczestnikom po ½ szansy na najbardziej lubiane przez nich dobro i ½ na trzecie dobro w ich hierarchiach preferencji.

Twierdzenie 7. Procedura L-RSS nie jest porządkowo optymalna.

Dowód. Na przykładzie przedstawionej w Tabeli 4 macierzy prawdopodobieństw dla profilu preferencji nr 3 da się wykazać, że także leksykograficzna procedura równych szans satysfakcji nie jest porządkowo optymalna. Rozwiązanie generowane przez tę procedurę jest zdominowane stochastycznie np. przez macierz przedstawioną w Tabeli 22:

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Tabela 22
Przykładowa macierz prawdopodobieństw dominująca stochastycznie rozwiązanie generowane przez procedurę L-RSS dla profilu preferencji nr 2

	d_1	d_2	d_3
g_1	1	0	0
g_2	0	1/2	1/2
g_3	0	1/2	1/2

Warto podkreślić, że rozwiązania generowane przez leksykograficzną procedurę równych szans satysfakcji nie są zdominowane stochastycznie przez żadne inne rozwiązanie zgodne z zasadą równych szans satysfakcji. Nie jest to jedyna możliwa procedura zgodna z zasadą równych szans satysfakcji o tej pożądanej cesze. Zaletę tę ma np. także alternatywna procedura leksykograficzna, która zamiast maksymalizować szanse otrzymania najwyżej cenionych dóbr – minimalizowałaby ryzyko otrzymania dóbr ocenianych najniżej.

4.2. Optymalność *ex post*

Przytoczona definicja optymalności *ex post* jest znana w literaturze (zob. np. Bogomolnaia i Moulin, 2001: 302; Kesten, 2006: 5), choć Czytelnik może często spotkać się z nieco inną definicją (zob. np. Szaniawski, 1966, 1975: 454; Lissowski, 1992, 2006: 14; 2008: 214; 2013: 207), przystosowaną do sytuacji, w której rozwiązaniami są loterie na alokacjach, nie zaś macierze prawdopodobieństw.

Oznaczmy przez d_{ix} dobro otrzymane przez i-tego uczestnika podziału przy deterministycznym podziale x.

Przez oznaczenie dR_ie rozumieć będziemy, że i-ty uczestnik podziału uważa dobro d za nie gorsze od dobra e, zaś przez oznaczenie dP_ie – że i-ty uczestnik podziału uważa dobro d za lepsze od dobra e.

Definicja. Deterministyczny podział x jest optymalny w mocnym sensie Pareto, jeśli nie istnieje żaden inny podział deterministyczny y, który byłby lepszy (bardziej preferowany) dla co najmniej jednego uczestnika podziału i jednocześnie nie gorszy dla wszystkich uczestników:

$$\nexists y \in X\colon \quad \Big(\big(\exists g \in G\colon d_{gy}\, P_g\, d_{gx}\big) \wedge \big(\forall i \in G\colon d_{iy}\, R_i\, d_{ix}\big) \Big)$$

Każda loteria na podziałach deterministycznych wyznacza jednoznacznie macierz prawdopodobieństw otrzymania poszczególnych dóbr przez poszczególnych uczestników podziału. Zbiór wszystkich możliwych loterii na alokacjach należących do zbioru X oznaczmy przez C_X. Macierz prawdopodobieństw wyznaczoną na podstawie loterii c oznaczmy przez $m(c)$.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Przypomnijmy, że niektóre macierze prawdopodobieństw można uzyskać przy użyciu wielu różnych loterii na podziałach deterministycznych.

Definicja. Macierz m spełnia warunek optymalności *ex post* wtedy i tylko wtedy, gdy jest osiągalna za pomocą jakiejś loterii c, która przypisuje prawdopodobieństwa równe 0 wszystkim deterministycznym podziałom, które nie są optymalne w mocnym sensie Pareto:

$$\exists c \in C_x\colon \quad \Big[\big(\forall x \in X, x \notin PO\colon P(x) = 0\big) \wedge \big(m(c) = m\big)\Big],$$

gdzie *PO* oznacza zbiór deterministycznych podziałów optymalnych w mocnym sensie Pareto.

Definicja. Procedura probabilistyczna jest optymalna *ex post* wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek optymalności *ex post*.

Lemat 1. Porządkowa optymalność implikuje optymalność *ex post*.

Dowód przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001: 297).

Twierdzenie 8. Procedura RSW jest optymalna *ex post*.

Dowód. Procedura RSW każdej wylosowanej kolejności dokonywania wyboru przez uczestników podziału przypisuje podział deterministyczny optymalny w mocnym sensie Pareto, zatem w sposób oczywisty jest optymalna *ex post*.

Twierdzenie 9. Procedura PS jest optymalna *ex post*.

Dowód. Procedura PS jest optymalna porządkowo, więc na mocy Lematu 1 musi być również optymalna *ex post*.

Twierdzenie 10. Procedura L-RSS nie jest optymalna *ex post*.

Dowód. Leksykograficzna procedura równych szans satysfakcji w niektórych przypadkach nie spełnia warunku optymalności *ex post*, co widać na przykładzie przedstawionej w Tabeli 4 macierzy prawdopodobieństw dla profilu preferencji nr 2.

W przykładzie tym deterministyczne podziały *A*, *B* i *F* są optymalne w mocnym sensie Pareto, zaś *C*, *D* i *E* nie są: wszystkie trzy są zdominowane w sensie Pareto przez podział *B*, a podział *C* jest ponadto zdominowany także przez podział *A*. Macierzy prawdopodobieństw generowanej przez L-RSS nie da się uzyskać przez loterie na podziałach *A*, *B* i *F*, co oznacza, że procedura L-RSS nie jest optymalna *ex post*.

Twierdzenie 11. Procedura LRR nie jest optymalna *ex post*.

Dowód. Losowanie alokacji z rozkładu równomiernego w niektórych przypadkach nie spełnia warunku optymalności *ex post*, co można wykazać na przykładzie profilu preferencji nr 1 (Tabela 1). Obaj uczestnicy podziału cenią wyżej inne z dwóch dóbr. W tym przykładzie jedyną Pareto-optymalną alokacją jest przyznanie każdemu uczestnikowi jego ulubionego dobra, zatem jedynym rozwiązaniem optymalnym *ex post* jest ta właśnie alokacja. Jednak w tej sytuacji obaj uczestnicy podziału mieliby prawdopodobieństwo uzyskania wyżej cenionego dobra równe 1, zaś w macierzy równych prawdopodobieństw wynosi ono ½.

4.3. Wolność od zazdrości

Postulat sformułowany przez Foleya (1967). Definicji w zaprezentowanym poniżej kształcie użyli m.in. Bogomolnaia i Moulin (2001: 309).

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

$Q_g(d)$ – prawdopodobieństwo otrzymania dobra d przez uczestnika g,

$u_g(d)$ – użyteczność kardynalna w ocenie uczestnika g dobra d; $u_g(d)>0$,

u_{ga} – użyteczność kardynalna w ocenie uczestnika g dobra, które zajmuje a-tą pozycję w jego profilu preferencji; $u_{ga}>0$,

U_p – zbiór profili użyteczności kardynalnych niesprzecznych z profilem preferencji p.

Definicja. Profil użyteczności u jest *niesprzeczny* z profilem preferencji p, jeśli dobra o wyższej użyteczności dla poszczególnych uczestników znajdują się wyżej w ich hierarchii preferencji:

$$u \text{ niesprzeczny z } p \Leftrightarrow \Big(\forall s,t \in D\ \forall g \in G\colon u_g(s) > u_g(t) \Leftrightarrow s\, P_g\, t\Big)$$

Definicja. Macierz prawdopodobieństw spełnia warunek wolności od zazdrości wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego profilu użyteczności niesprzecznego z profilem preferencji wartość oczekiwana loterii każdego uczestnika podziału jest w jego ocenie nie mniejsza od wartości oczekiwanej loterii każdego innego uczestnika.

$$\forall u \in U_p\colon \forall g,h \in G\colon \quad \sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i) \geq \sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)\, u_g(d_i)$$

Definicja. Procedura jest wolna od zazdrości wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek wolności od zazdrości.

Twierdzenie 12. Procedura LRR jest wolna od zazdrości.

Dowód. Procedura LRR jest w sposób oczywisty wolna od zazdrości, gdyż wszyscy uczestnicy podziału mają równe szanse na otrzymanie poszczególnych dóbr.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Twierdzenie 13. Procedura PS jest wolna od zazdrości.

Dowód przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001: 318).

Twierdzenie 14. Procedura L-RSS nie jest wolna od zazdrości.

Dowód. W niektórych przypadkach procedura L-RSS generuje podziały, w których pewni uczestnicy zazdroszczą innym uczestnikom. Można to wykazać na przykładzie przedstawionej w Tabeli 4 macierzy prawdopodobieństw dla profilu preferencji nr 2. W przykładzie tym uczestnicy g_1 i g_3 z pewnością zazdroszczą uczestnikowi g_2, zaś uczestnik g_2 z pewnością zazdrości uczestnikowi g_3.

Twierdzenie 15. Procedura RSW nie jest wolna od zazdrości.

Dowód. Bogomolnaia i Moulin (2001: 308) wykazali, że procedura RSW nie jest wolna od zazdrości, na przykładzie profilu preferencji nr 4 (zob. Tabela 11), dla którego procedura RSW generuje rozwiązanie przedstawione w Tabeli 23.

Tabela 23
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę RSW na podstawie profilu preferencji nr 4 (zob. Tabela 11)

	d_1	d_2	d_3
g_1	1/2	1/6	1/3
g_2	1/2	0	1/2
g_3	0	5/6	1/6

Tabela 24
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury RSW dla profilu preferencji nr 4 (zob. Tabela 11)

	najwyżej oceniane dobro	drugie najwyżej oceniane dobro	najniżej oceniane dobro
g_1	1/2	1/6	1/3
g_2	1/2	1/2	0
g_3	5/6	0	1/6

W przykładzie tym uczestnik g_1 może zazdrościć uczestnikowi g_3. Będzie tak np. w przypadku, gdy dla uczestnika g_1 użyteczność dobra d_1 wynosi 7, dobra d_2 6, a dobra d_3 0. Wówczas w jego ocenie wartość oczekiwana jego własnej loterii wynosi $7 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 4{,}5$, zaś wartość oczekiwaną loterii uczestnika g_3 ocenia na $6 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} = 5$. W tym przypadku uczestnik g_1 uważa, że uczestnik g_3 jest w korzystniejszej sytuacji i wolałby się z nim zamienić, a zatem mu zazdrości.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

W literaturze przedmiotu można jednak spotkać także przeciwne twierdzenie (Kuc, 2000: 192–193, Lissowski, 2008: 203, 2013: 196), jednak rozbieżność ta da się wytłumaczyć użyciem innej definicji wolności od zazdrości.

4.4. Słaba wolność od zazdrości

Postulatu słabej wolności od zazdrości w poniższej formie użyli m.in. Bogomolnaia i Moulin (2001: 309).

Definicja. Macierz prawdopodobieństw spełnia warunek słabej wolności od zazdrości wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki profil użyteczności niesprzeczny z profilem preferencji, że wartość oczekiwana loterii każdego uczestnika podziału jest w jego ocenie nie mniejsza od wartości oczekiwanej loterii każdego innego uczestnika.

$$\exists u \in U_p : \forall g, h \in G: \quad \sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i) \geq \sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)\, u_g(d_i)$$

Definicja. Procedura jest słabo wolna od zazdrości wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek słabej wolności od zazdrości.

Twierdzenie 16. LRR i PS są słabo wolne od zazdrości.

Dowód. LRR i PS są wolne od zazdrości, są więc też słabo wolne od zazdrości.

Twierdzenie 17. Procedura RSW jest słabo wolna od zazdrości.

Dowód przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001: 320–321).

Twierdzenie 18. Procedura L-RSS nie jest słabo wolna od zazdrości.

Dowód. Na przykładzie opisanym w poprzednim punkcie (zob. 4.3) widać, że uczestnicy g_1 i g_3 z pewnością zazdroszczą uczestnikowi g_2, zaś uczestnik g_2 z pewnością zazdrości uczestnikowi g_3. Procedura L-RSS nie jest zatem wolna od zazdrości nawet w słabym sensie.

4.5. Proporcjonalność

Podaną poniżej definicję proporcjonalności można znaleźć w wielu tekstach (np. Kuc, 2000: 187; Lissowski, 2006: 22–23).

Definicja. Macierz prawdopodobieństw spełnia warunek proporcjonalności wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego uczestnika wartość oczekiwana użyteczności wyznaczonej dla niego loterii jest w jego odczuciu nie mniejsza od $1/n$ sumy użyteczności poszczególnych dóbr.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

$$\forall u \in U_p : \forall g \in G : \quad \sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_g(d_i)$$

Definicja. Procedura jest proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek proporcjonalności.

Lemat 2. Macierz jest proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą równych prawdopodobieństw lub macierzą dominującą ją stochastycznie.

Dowód. W przypadku, gdy uczestnik ma szansę równą 1/*n* na otrzymanie każdego z dóbr, wartość oczekiwana jego loterii wynosi 1/*n* sumy użyteczności poszczególnych dóbr. Jeśli jego loteria dominuje stochastycznie równe szanse na każde z dóbr, to wartość oczekiwana tej loterii musi być większa od 1/*n* sumy użyteczności poszczególnych dóbr. W pozostałych wypadkach musi istnieć takie *k*, że szansa uczestnika na otrzymanie jednego z *k* najwyżej cenionych dóbr jest mniejsza od *k*/*n*. Wówczas wystarczy, aby różnica między użytecznością *k*-tego i *k+1*-szego dobra była odpowiednio duża, by wartość oczekiwana użyteczności loterii dla tego uczestnika była niższa niż 1/*n* sumy użyteczności poszczególnych dóbr.

Lemat 3. Jeżeli procedura jest wolna od zazdrości, to jest też proporcjonalna.

Dowód. Jeżeli wartość oczekiwana użyteczności dla danego uczestnika podziału jest w jego ocenie nie mniejsza niż wartość oczekiwana dla każdego pozostałego uczestnika, to musi oceniać swoją wartość oczekiwaną za co najmniej równą 1/*n* sumy użyteczności rozdzielanych dóbr. W przeciwnym wypadku suma wartości oczekiwanych użyteczności loterii wszystkich uczestników podziału w ocenie tego uczestnika byłaby mniejsza od sumy użyteczności rozdzielanych dóbr.

Twierdzenie 19. Procedury LRR i PS są proporcjonalne.

Dowód. Skoro procedury LRR i PS są wolne od zazdrości, to na mocy Lematu 3 muszą być też proporcjonalne.

Twierdzenie 20. Procedura RSW jest proporcjonalna.

Dowód. Jeśli wszyscy uczestnicy podziału mają identyczne preferencje, to rozwiązaniem będzie macierz równych prawdopodobieństw. W pozostałych sytuacjach rozwiązanie będzie dominowało stochastycznie macierz równych prawdopodobieństw (zob. Kuc, 2000: 188; Lissowski, 2006: 23), a zatem na mocy Lematu 2 procedura RSW musi być proporcjonalna.

Twierdzenie 21. Procedura L-RSS nie jest proporcjonalna.

Dowód. Rozważmy przykład przedstawionej w Tabeli 4 macierzy prawdopodobieństw dla profilu preferencji nr 2. W przykładzie tym wszyscy uczestnicy podziału mają szansę ½ na najwyżej oceniane dobro i ½ na najniżej oceniane dobro. Istnieją profile użyteczności niesprzeczne z profilem preferencji, dla których uczestnicy otrzymują loterie o wartości oczekiwanej poniżej $1/n$ sumy użyteczności dóbr w zbiorze, np. wtedy, gdy dla każdego uczestnika użyteczność najwyżej cenionego przez niego dobra wynosi 9, drugiego 8, zaś trzeciego 1. Wartość oczekiwana użyteczności dóbr możliwych do uzyskania w wygenerowanej loterii wynosi $9 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 5$, zaś $1/n$ sumy użyteczności dóbr wynosi $\frac{9+8+1}{3} = 6$.

4.6. Słaba proporcjonalność

Definicja. Macierz prawdopodobieństw spełnia warunek słabej proporcjonalności wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego uczestnika podziału istnieje możliwość, że wartość oczekiwana użyteczności wyznaczonej dla niego loterii jest w jego odczuciu nie mniejsza od $1/n$ sumy użyteczności poszczególnych dóbr.

$$\exists u \in U_p : \forall g \in G: \quad \sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_g(d_i)$$

Definicja. Procedura jest słabo proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek słabej proporcjonalności.

Lemat 4. Macierz jest słabo proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz równych prawdopodobieństw nie dominuje stochastycznie tej macierzy dla żadnego uczestnika podziału.

Dowód. Macierz równych prawdopodobieństw każdemu uczestnikowi gwarantuje wartość oczekiwaną równą $1/n$ sumy użyteczności dóbr. Jeśli wygenerowane rozwiązanie jest dla jakiegoś uczestnika podziału zdominowane przez macierz równych prawdopodobieństw, to dla tego uczestnika wartość oczekiwana musi być mniejsza niż $1/n$. Jeśli nie jest, to albo przydziela uczestnikowi szansę $1/n$, albo nie. W pierwszym przypadku w sposób oczywisty wartość oczekiwana loterii tego uczestnika jest równa $1/n$ sumy użyteczności dóbr. W drugim przypadku, skoro rozwiązanie nie jest dla tego uczestnika zdominowane przez macierz równych prawdopodobieństw, to musi istnieć takie k, że szansa uczestnika na otrzymanie jednego z k najwyżej cenionych dóbr przekracza k/n. Wówczas wystarczy, aby różnica między użytecznością k-tego i $k+1$-szego dobra była odpowiednio duża, by wartość oczekiwana użyteczności loterii dla tego uczestnika przekroczyła $1/n$ sumy użyteczności poszczególnych dóbr.

Twierdzenie 22. Procedury LRR, RSW i PS są słabo proporcjonalne.

Dowód. Procedury LRR, RSW i PS są proporcjonalne w mocnym sensie, zatem muszą być też proporcjonalne w sensie słabym.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Twierdzenie 23. Procedura L-RSS jest słabo proporcjonalna.

Dowód. Macierz równych prawdopodobieństw jest jednym z rozwiązań spełniających warunek równych szans satysfakcji. L-RSS wybiera z pewnością rozwiązanie, w którym szansa wylosowania najwyżej cenionego dobra jest nie mniejsza niż w przypadku macierzy równych prawdopodobieństw. Jeśli jest większa, to rozwiązanie nie może być zdominowane stochastycznie przez macierz równych prawdopodobieństw. Jeśli zaś jest równa, to analogiczne rozumowanie należy przeprowadzić dla kolejnego dobra w hierarchii preferencji. Albo dla któregoś dobra szansa ta będzie większa (a szanse na otrzymanie lepszych dóbr równe $1/n$ każda), albo uzyskamy macierz równych prawdopodobieństw. Wygenerowana macierz nie może być więc zdominowana przez macierz równych prawdopodobieństw, zatem na mocy Lematu 4 procedura L-RSS musi być proporcjonalna.

4.7. Słuszność

Mianem słuszności bywa określane wiele rozmaitych postulatów. W niniejszym artykule słuszność będzie rozumiana według definicji Bramsa i Taylora (1996: 241).

Definicja. Macierz prawdopodobieństw spełnia warunek słuszności wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich profili użyteczności kardynalnych niesprzecznych z profilem preferencji każdy uczestnik podziału identycznie ocenia proporcję wartości oczekiwanej użyteczności swojej loterii do sumy użyteczności wszystkich rozdzielanych dóbr.

$$\forall u \in U_p \colon \forall g,h \in G \colon \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i)}{\sum_{i=1}^{n} u_g(d_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)\, u_h(d_i)}{\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)}$$

Definicja. Procedura jest słuszna wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek słuszności.

Lemat 5. Jedyną macierzą prawdopodobieństw spełniającą warunek słuszności jest macierz równych prawdopodobieństw.

Dowód. Przypuśćmy, że dla pewnej macierzy prawdopodobieństw przy pewnym profilu użyteczności każdy uczestnik podziału identycznie ocenia proporcję wartości oczekiwanej użyteczności swojej loterii do sumy użyteczności wszystkich rozdzielanych dóbr. Dokonajmy następnie zmiany wartości użyteczności jednego z dóbr w profilu użyteczności jednego uczestnika tak, aby nowy profil użyteczności po zmianie był nadal niesprzeczny z profilem preferencji. Stosunek wartości oczekiwanej loterii do sumy użyteczności dóbr mógł się zmienić tylko dla tego uczestnika, dla pozostałych zaś nie, zatem aby rzeczone proporcje były nadal równe dla wszystkich uczestników, przeprowadzona zmiana nie mogłaby zmienić tej proporcji dla uczestnika, w którego wektorze użyteczności dokonano zmian. Jeśli po dowolnej takiej zmianie uczestnik podziału identycznie ocenia rzeczoną proporcję, to poprzez serię pojedynczych zmian możemy uzyskać dowolny profil użyteczności niesprzeczny z profilem preferencji. Zatem macierz prawdopodobieństw będzie słuszna zawsze i tylko, jeśli przy pewnym profilu użyteczności każdy uczestnik podziału identycznie ocenia proporcję wartości oczekiwanej użyteczności swojej loterii do sumy użyteczności wszystkich rozdzielanych dóbr, a dowolna pojedyncza zmiana w profilu użyteczności nie powoduje zmian w proporcji wartości oczekiwanej loterii do sumy wartości dóbr.

Oznaczmy przez Δ_{gi} różnicę między użytecznością i-tego dobra dla uczestnika g według zmodyfikowanego profilu preferencji a użytecznością według profilu pierwotnego. Aby zmiana użyteczności dowolnego lecz ustalonego dobra d_j dla dowolnego lecz ustalonego uczestnika h nie powodowała zmiany proporcji między wartością oczekiwaną loterii, musi być spełnione równanie:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i)}{\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i) + \Delta_{hj}\, Q_h(d_j)}{\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i) + \Delta_{hj}}$$

Z powyższego równania wynika, że:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i)\left(\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i) + \Delta_{hj}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)\left(\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i) + \Delta_{hj}Q_h(d_j)\right)$$

Równanie to da się uprościć do:

$$\Delta_{hj}\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i) = \Delta_{hj}Q_h(d_j)\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)$$

$\Delta_{hj} \neq 0$, zatem:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i) = Q_h(d_j)\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)$$

Co za tym idzie:

$$Q_h(d_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)u_h(d_i)}{\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)}$$

Zatem zmiana użyteczności dobra dla pewnego uczestnika nie zmienia proporcji między wartością oczekiwaną loterii a sumą użyteczności dóbr zawsze i tylko, gdy prawdopodobieństwo otrzymania tego dobra przez tego uczestnika jest równe tej proporcji.

Jeśli ta proporcja ma pozostać niezmienna przy zmianie użyteczności dowolnego dobra, oznacza to, że prawdopodobieństwa otrzymania każdego dobra muszą być równe tej proporcji, a przez to także sobie nawzajem. W konsekwencji macierze inne niż macierz równych prawdopodobieństw nie mogą być słuszne.

Pozostało wykazać, że macierz równych prawdopodobieństw jest słuszna. Jeśli każde z prawdopodobieństw otrzymania określonego dobra przez każdego uczestnika jest równe $1/n$, to dla każdego uczestnika proporcja między wartością oczekiwaną takiej loterii musi być równa $1/n$ sumy użyteczności dóbr, a zatem dla każdego z nich jest równa. Ponadto prawdopodobieństwo otrzymania określonego dobra przez danego uczestnika jest zawsze równe $1/n$, zatem jest równe tej proporcji.

W literaturze można wprawdzie spotkać także inne procedury określane jako słuszne, jednak wiąże się to bądź z inną definicją słuszności, bądź z innymi założeniami modelu.

Gdyby dopuścić możliwość, że dobro może nie zostać przydzielone nikomu, to istniałby drugi podział gwarantujący słuszność – taki, w którym nikt niczego nie otrzymuje. Wtedy każdy uczestnik otrzymałby część o użyteczności równej 0% sumy użyteczności wszystkich dóbr.

Twierdzenie 24. Procedura LRR jest jedyną procedurą słuszną.

Dowód. Procedura LRR każdemu profilowi preferencji przypisuje macierz równych prawdopodobieństw, która jest jedyną macierzą spełniającą warunek słuszności (Lemat 5). Jeśli procedura jakiemuś profilowi preferencji przypisuje macierz inną niż macierz równych prawdopodobieństw, to generuje macierz niespełniającą warunku słuszności, a zatem procedura ta nie jest słuszna. Jeśli zaś każdemu profilowi preferencji przypisuje macierz równych prawdopodobieństw, to jest równoważna procedurze LRR.

Przy dodatkowym założeniu na temat profilu użyteczności słuszna byłaby także procedura L-RSS. Wymagałoby to jednak przyjęcia, że stosunek użyteczności najlepszego dobra do użyteczności drugiego najlepszego dobra jest taki sam dla wszystkich uczestników podziału, podobnie stosunek między drugim a trzecim najlepszym dobrem, między trzecim a czwartym etc. Jednak bez tego założenia procedura L-RSS nie jest słuszna w opisanym wyżej rozumieniu.

4.8. Słaba słuszność

Definicja. Macierz prawdopodobieństw spełnia warunek słabej słuszności wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki profil użyteczności kardynalnych niesprzeczny z profilem preferencji, przy którym każdy uczestnik podziału identycznie ocenia proporcję wartości oczekiwanej użyteczności swojej loterii do sumy użyteczności wszystkich rozdzielanych dóbr.

$$\exists u \in U_p : \forall g,h \in G: \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i)}{\sum_{i=1}^{n} u_g(d_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_h(d_i)\, u_h(d_i)}{\sum_{i=1}^{n} u_h(d_i)}$$

Definicja. Procedura jest słabo słuszna wtedy i tylko wtedy, gdy generuje wyłącznie macierze spełniające warunek słabej słuszności.

Twierdzenie 25. Procedura LRR jest słabo słuszna.

Dowód. Procedura LRR jest słuszna w mocnym sensie, musi więc być słuszna także w sensie słabym.

Twierdzenie 26. Procedura L-RSS jest słabo słuszna.

Dowód. Przykład typu profilu użyteczności, przy których warunek ten jest spełniony, został podany w pkt 4.7.

Twierdzenie 27. Procedury RSW i PS również są słabo słuszne.

Dowód. Procedury te generują zawsze macierze równych prawdopodobieństw (a więc spełniające warunek słuszności) lub porządkowo lepsze dla każdego uczestnika od takiej macierzy. W tym drugim przypadku zawsze da się dobrać użyteczności w taki sposób, by podział był słuszny. Staje się to oczywiste, jeśli zauważy się, że użyteczności dla pojedynczego uczestnika podziału mogą być do siebie dowolnie zbliżone, a więc wartość oczekiwana użyteczności wygenerowanego rozwiązania może być dla tego uczestnika dowolnie bliska $1/n$ sumy użyteczności dóbr (aczkolwiek musi być od niej większa).

4.9. Odporność na indywidualne zachowania strategiczne

Jest to postulat często spotykany w literaturze przedmiotu. Poniższą definicję tego postulatu znaleźć można w wielu artykułach (np. Bogomolnaia i Moulin, 2001: 309).

Definicja. Procedura jest odporna na indywidualne zachowania strategiczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla żadnego profilu preferencji nie istnieje profil różniący się od niego wyłącznie preferencjami jednego uczestnika podziału, dla którego to profilu rozwiązanie wygenerowane przez procedurę mogłoby być korzystniejsze dla tego uczestnika, tj. zapewniać mu wyższą wartość oczekiwaną użyteczności przy pewnym profilu użyteczności kardynalnych niesprzecznym z pierwotnym profilem preferencji.

W przeciwnym wypadku podanie nieprawdziwych informacji na temat swoich preferencji na dobrach mogłoby być opłacalne dla uczestnika. Oznaczmy przez Q'_g prawdopodobieństwa uzyskane w wyniku podania przez uczestnika g nieprawdziwej preferencji na rozdzielanych dobrach.

$$\forall p \in P_{GD}\ \forall u \in U_p : \forall g \in G: \quad \sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i) \geq \sum_{i=1}^{n} Q'_g(d_i)\, u_g(d_i)$$

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Twierdzenie 28. Procedura LRR jest odporna na zachowania strategiczne.

Dowód. Procedura LRR jest w oczywisty sposób odporna na zachowania strategiczne: skoro preferencje uczestników nie są brane pod uwagę, to zmiana profilu preferencji nie ma wpływu na generowane rozwiązanie.

Twierdzenie 29. Procedura RSW jest odporna na zachowania strategiczne.

Dowód. Zadeklarowanie przez uczestnika nieszczerych preferencji może dla niego sprawić jedynie to, że dla niektórych kolejności dokonywania wyborów otrzymałby dobro mniej pożądane niż najlepsze dostępne. Formalny dowód przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001: 320).

Twierdzenie 30. Procedura L-RSS nie jest odporna na zachowania strategiczne.

Dowód. Brak odporności procedury L-RSS na zachowania strategiczne da się zaobserwować na poniższym przykładzie:

Tabela 25
Profil preferencji nr 5

	d_1	d_2	d_3
g_1	1	2	3
g_2	2	1	3
g_3	2	1	3

Dla profilu preferencji nr 5 (zob. Tabela 25) rozwiązaniem jest macierz równych prawdopodobieństw. Gdyby jednak uczestnik g_2 zadeklarował, że woli dobro d_3 od d_1, wówczas profil zadeklarowanych preferencji byłby identyczny z profilem preferencji nr 2 (zob. Tabela 2), a macierz prawdopodobieństw byłaby taka, jak w Tabeli 4. Macierz ta byłaby z pewnością bardziej opłacalna dla uczestnika g_2 – zamiast równych szans na otrzymanie każdego z trzech dóbr, miałby szansę ½ na otrzymanie ulubionego dobra i ½ na otrzymanie drugiego ulubionego dobra.

Twierdzenie 31. Procedura PS nie jest odporna na zachowania strategiczne.

Dowód. Brak odporności procedury PS na zachowania strategiczne da się wykazać na przykładzie profilu preferencji nr 4 (Tabela 11). Przykład ten przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001: 308). Dla tego profilu preferencji procedura PS generuje macierz prawdopodobieństw przedstawioną w Tabeli 12.

Rozpatrzmy profil preferencji różniący się od profilu nr 4 tym, że uczestnik g_3 woli dobro d_1 od dobra d_2.

Tabela 26
Zmodyfikowany profil preferencji nr 4, w którym uczestnik g_3 woli dobro d_1 od dobra d_2

	d_1	d_2	d_3
g_1	1	2	3
g_2	1	3	2
g_3	1	2	3

Wówczas rozwiązaniem byłaby macierz przedstawiona w Tabeli 27:

Tabela 27
Macierz prawdopodobieństw wygenerowana przez procedurę PS na podstawie zmodyfikowanego profilu preferencji nr 4, w którym uczestnik g_3 woli dobro d_1 od dobra d_2 (zob. Tabela 26)

	d_1	d_2	d_3
g_1	1/3	1/2	1/6
g_2	1/3	0	2/3
g_3	1/3	1/2	1/6

Tabela 28
Prawdopodobieństwa otrzymania przez poszczególnych uczestników dóbr znajdujących się na określonym miejscu w ich hierarchii preferencji przy zastosowaniu procedury PS profilu preferencji nr 4, w którym uczestnik g_3 woli dobro d_1 od dobra d_2 (zob. Tabela 26)

	d_1	d_2	d_3
g_1	1/3	1/2	1/6
g_2	1/3	2/3	0
g_3	1/2	1/3	1/6

W przypadku, gdyby dla uczestnika g_3 użyteczność dóbr d_1, d_2, d_3 wynosiła odpowiednio np. 9, 10 i 1, wówczas wynik taki, jak w Tabeli 27, byłby dla niego bardziej opłacalny niż ten w Tabeli 12. Opłacałoby mu się wówczas podać nieprawdziwe preferencje na dobrach, deklarując, że woli dobro d_1 od dobra d_2. Dla oryginalnego profilu preferencji nr 4 oczekiwana użyteczność loterii dla uczestnika g_3 wyniosłaby bowiem $9 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 7{,}75$, zaś w przypadku zmodyfikowanego profilu preferencji $9 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 8\frac{1}{6}$.

4.10. Słaba odporność na indywidualne zachowania strategiczne

Poniższej definicji użyli m.in. Bogomolnaia i Moulin (2001: 309).

Definicja. Procedura jest odporna na indywidualne zachowania strategiczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla żadnego profilu preferencji nie istnieje profil różniący się od niego wyłącznie preferencjami jednego uczestnika podziału, dla którego to profilu

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

rozwiązanie wygenerowane przez procedurę jest z pewnością korzystniejsze dla tego uczestnika, tj. zapewnia mu wyższą wartość oczekiwaną użyteczności przy każdym profilu użyteczności kardynalnych niesprzecznym z pierwotnym profilem preferencji.

$$\forall p \in P_{GD}\ \exists u \in U_p \colon \forall g \in G \colon \quad \sum_{i=1}^{n} Q_g(d_i)\, u_g(d_i) \geq \sum_{i=1}^{n} Q'_g(d_i)\, u_g(d_i)$$

Twierdzenie 32. Procedury LRR i RSW są słabo odporne na zachowania strategiczne.

Dowód. Procedury te są odporne na zachowania strategiczne, a zatem muszą też być słabo odporne na zachowania strategiczne.

Twierdzenie 33. Procedura PS jest słabo odporna na zachowania strategiczne.

Dowód przedstawili Bogomolnaia i Moulin (2001, 318–320).

Twierdzenie 34. Procedura L-RSS nie jest słabo odporna na zachowania strategiczne.

Dowód. Brak słabej odporności na zachowania strategiczne widać na przykładzie przedstawionym w pkt 4.9: dla uczestnika g_2 jest z pewnością bardziej opłacalne otrzymać dwa najwyżej cenione przez siebie dobra z szansą ½ na każde, niż mieć szanse równe 1/3 na otrzymanie każdego z trzech dóbr.

4.11. Podsumowanie

Tabela 29 zawiera podsumowanie własności omawianych procedur. Jak wcześniej wykazano, niektóre z tych procedur są sobie równoważne, tj. zawsze prowadzą do takich samych wyników. Równoważne są procedura równych szans wyboru i procedura *core from random endowments*. Równoważne są także: procedura *probabilistic serial*, procedura równych szans wyboru z czynnikiem *k* dla nieskończenie dużego *k*, a także procedura *top trading cycles from equal division*. Procedury wzajemnie równoważne mają takie same własności formalne, dlatego w niniejszym zestawieniu zostały ujęte razem.

Losowanie z rozkładu równomiernego posiada szereg zalet i bardzo poważną wadę w postaci braku optymalności zarówno porządkowej, jak *ex post*. Leksykograficzna procedura równych szans satysfakcji spełnia bardzo wąski zestaw postulatów, z których każdy jest spełniany przez wszystkie pozostałe z omawianych procedur. Procedura równych szans wyboru (i równoważna jej procedura *core from random endowments*) spełnia szeroki zestaw postulatów – nie spełnia jedynie warunku porządkowej optymalności, wolności od zazdrości i słuszności. Optymalna porządkowa i wolna od zazdrości jest za to procedura *probabilistic serial* (i dwie równoważne jej procedury), ale za cenę utraty odporności na jednostkowe zachowania strategiczne.

Tabela 29
Podsumowanie własności formalnych omawianych probabilistycznych procedur podziału zbioru dóbr niepodzielnych

Własność	LRR	L-RSS	RSW, CfRE	PS, TTCfED, RSW-*k*-inf
Porządkowa optymalność	×	×	×	✓
Optymalność *ex post*	×	×	✓	✓
Wolność od zazdrości	✓	×	×	✓
Słaba wolność od zazdrości	✓	×	✓	✓
Proporcjonalność	✓	×	✓	✓
Słaba proporcjonalność	✓	✓	✓	✓
Słuszność	✓	×	×	×
Słaba słuszność	✓	✓	✓	✓
Odporność na jednostkowe zachowania strategiczne	✓	×	✓	×
Słaba odporność na jednostkowe zachowania strategiczne	✓	×	✓	✓

Na podstawie przeprowadzonych analiz właściwości formalnych procedur probabilistycznych można dojść do kilku wniosków sformułowanych bardziej ogólnie.

Twierdzenie 35. Nie istnieje procedura probabilistyczna, która byłaby jednocześnie słuszna i porządkowo optymalna.

Twierdzenie 36. Nie istnieje procedura probabilistyczna, która byłaby jednocześnie słuszna i optymalna *ex post*.

Dowód. Jedyną procedurą słuszną jest procedura LRR (zob. Twierdzenie 24). Procedura ta nie jest porządkowo optymalna ani optymalna *ex post*.

Twierdzenie 37. Jeśli procedura probabilistyczna jest słuszna, to jest też wolna od zazdrości, proporcjonalna i odporna na zachowania strategiczne.

Dowód. Jedyną procedurą słuszną jest procedura LRR (zob. Twierdzenie 24). Procedura ta jest wolna od zazdrości, proporcjonalna i odporna na zachowania strategiczne.

5. Zakończenie

Niniejszy artykuł przedstawia wybrane procedury probabilistyczne wraz z ich własnościami formalnymi. Warto podkreślić, że założenia przyjęte w artykule (i często przyjmowane w literaturze) zawężają zakres stosowalności procedur, mogą one jednak stanowić użyteczne punkty odniesienia przy ocenie procedur stosowanych w praktyce. Uchylenie poszczególnych założeń ma daleko idące konsekwen-

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

cje. Rezygnowanie z poszczególnych założeń przy próbie zachowania dotychczasowych pożądanych cech procedur wyznacza pole dalszego rozwoju analiz procedur probabilistycznych.

Uchylenie założenia o mocnych preferencjach rozszerzyłoby dziedzinę procedur probabilistycznych o profile preferencji zawierające indyferencje, którym to profilom musiałyby przypisać macierze prawdopodobieństw. Procedury mogłyby wtedy nie spełniać niektórych spełnianych dotychczas postulatów w przypadku, gdyby macierze generowane dla profili z indyferencjami okazały się nie mieć pewnych pożądanych cech.

Przyjęcie założenia o mocniejszej skali pomiaru preferencji nie tylko zmieniłoby dziedzinę procedur probabilistycznych, lecz także miałoby istotny wpływ na formułowanie pożądanych cech macierzy prawdopodobieństw – wolności od zazdrości, proporcjonalności, słuszności i odporności na zachowania strategiczne. Wówczas znane byłyby konkretne wartości użyteczności poszczególnych dóbr dla kolejnych uczestników, nie byłoby zatem potrzeby rozważania całej klasy profili użyteczności niesprzecznych z profilem preferencji.

Zrezygnowanie z założenia o tym, że każdy uczestnik ma otrzymać dokładnie jedno dobro, nawet przy zachowaniu założenia równej liczby dóbr i uczestników podziału, rozszerza zbiór dopuszczalnych rozwiązań – macierze prawdopodobieństw nie musiałyby być podwójnie stochastyczne, wystarczyłoby, aby dla każdego dobra suma prawdopodobieństw trafienia do poszczególnych uczestników wynosiła 1. Jeśli uwzględnić, że pewne dobra mogą być wzajemnie komplementarne (np. komputer i monitor) lub substytucyjne (np. dwa zegarki), to wówczas sposób, w jaki macierz prawdopodobieństw przełoży się na loterię na alokacjach, nie jest pozbawiony znaczenia.

Rozszerzenie procedur na sytuacje, gdy liczba dóbr jest mniejsza od liczby uczestników podziału, jest rozwiązywalna przez stworzenie sztucznego „pustego" niewyczerpywalnego dobra. Wymaga to relatywnie niewielkich modyfikacji istniejących procedur (np. w razie potrzeby innej liczby żetonów na to dobro przy procedurze RSW-*k*). Można także stworzyć odpowiednią liczbę „pustych" wyczerpywalnych dóbr, jednak wówczas uczestnicy byliby indyferentni między „pustymi" dobrami, co wymaga przystosowania procedury do indyferencji. Większe problemy stwarza sytuacja, gdy liczba dóbr przekracza liczbę osób. Należy wtedy ustalić, czy możliwe jest, by uczestnik otrzymał więcej niż jedno dobro. Odpowiedź zależy od tego, do jakiej klasy problemów ma być wykorzystywana procedura – przy podziale spadku uczestnicy mogą otrzymywać więcej niż jedno dobro, jednak mija się to z celem np. przy przydzielaniu miejsc na studia. Dopuszczenie otrzymywania więcej niż jednego dobra rodzi problemy wskazane w poprzednim akapicie.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Możliwość uwzględniania przez uczestników konsekwencji podziału dla pozostałych uczestników wymagałaby określenia preferencji uczestników podziału nie na dobrach, ale na całych macierzach prawdopodobieństw, lub co najmniej dołączenia dodatkowych informacji o wpływie tego, co otrzymają inni, na użyteczność macierzy stanowiącej rozwiązanie.

Zróżnicowanie uprawnień poszczególnych uczestników do zbioru dzielonych dóbr radykalnie zmienia sposób oceny macierzy prawdopodobieństw. Wymaga to przeformułowania definicji pożądanych cech macierzy prawdopodobieństw i procedur.

Niezależnie od konsekwencji założeń, problem dekompozycji macierzy prawdopodobieństw na loterie na alokacjach stanowi osobne zagadnienie ważne ze względów praktycznych. Jeśli losowanie ma zostać przeprowadzone w praktyce, to musi być określony jakiś algorytm tego losowania. Znając ten algorytm można określić, jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania określonej alokacji deterministycznej. Algorytm ten przekłada zatem macierze prawdopodobieństw na loterie na alokacjach. Warto przy tym zauważyć, że pewne loterie na alokacjach mogą mieć pewne pożądane lub niepożądane cechy w porównaniu do innych loterii prowadzących do takich samych macierzy prawdopodobieństw.

Wymienione zagadnienia wskazują, że w dziedzinie badań nad procedurami probabilistycznymi wciąż jest jeszcze wiele do zrobienia.

Bibliografia

Abdulkadiroğlu, A., Sönmez, T. (1998). Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. *Econometrica, 66*, 689-701.

Bogomolnaia, A., Moulin, H. (2001). A new solution to the random assignment problem. *Journal of Economic Theory, 100*, 295-328.

Bożykowski, M. (2011). Procedury podziału zbioru dóbr niepodzielnych z rekompensatami pieniężnymi. *Decyzje, 15*, 5-22.

Bożykowski, M. (2012). Problem podziału zbioru dóbr niepodzielnych w sytuacji nierównych uprawnień. *Decyzje, 18*, 25-47.

Brams, S.J., Taylor, A.D. (1996). *Fair Division: From cake-cutting to dispute resolution*. Cambridge: Cambridge University Press.

Foley, D.K. (1967). Resource allocation and the public sector. *Yale Economic Essays*, *7*, 45-98.

Katta, A.K., Sethurman, J. (2006). A solution to the random assignment problem on the full preference domain. *Journal of Economic Theory, 131*, 231-250.

Kahneman, D. (2012). *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*. Media Rodzina.

Kahneman, D., Tversky, A. (1984). Choices, Values, and Frames. *American Psychologist, 39*, 341-350.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78

Kesten, O. (2006). *Probabilistic Serial and Top Trading Cycles from Equal Division for the Random Assignment Problem*. Carnegie Mellon University, artykuł niepublikowany.

Kesten, O. (2009). Why Do Popular Mechanisms Lack Efficiency in Random Environments? *Journal of Economic Theory, 144*, 2209-2226.

Kuc, M. (2000). Analiza zasad sprawiedliwości Klemensa Szaniawskiego. *Studia Socjologiczne, 1-2*(156-157), 167-195.

Kuhn, H.W. (1967). On games of fair division. W: Shubik M. (red.) *Essays in Mathematical Economics: In Honor of Oskar Morgenstern* (s. 29-37). Princeton: Princeton University Press.

Lissowski, G. (1992). Probabilistyczny podział dóbr. *Prakseologia, 3-4*(116-117), 149-165.

Lissowski, G. (2006). Probabilistyczne zasady równości Klemensa Szaniawskiego. *Decyzje, 6*, 5-32

Lissowski, G. (2008). *Zasady sprawiedliwego podziału dóbr.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar.

Lissowski, G. (2013). *Principles of Distributive Justice*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, Opladen, Berlin, Toronto: Barbara Budrich Publishers.

Luce, R.D., Raiffa, H. (1964). *Gry i decyzje.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Sandel, M.J. (2013). *Czego nie można kupić za pieniądze.* Kurhaus Publishing.

Shapley, L.S., Scarf, H. (1974). On Cores and Indivisibility. *Journal of Mathematical Economics, 1*, 23-37.

Szaniawski, K. (1966). O pojęciu podziału dóbr. *Studia Filozoficzne, 2*(45), 61-72.

Szaniawski, K. (1975). Formal analysis of evaluative concepts. *International Social Science Journal, 3*(27), 446-457.

Szaniawski, K. (1979). On formal aspects of distributive justice. W: Saarinen, E., Hilpinen, R., Provence Hintikka, M.B. (red.) *Essays in Honour of Jaakko Hintikka on the Occasion of Fiftieth Birthday on January, 12, 1979* (s. 135-146). Dordecht: Reidel.

von Neumann, J., Morgenstern O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.78